

Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Björn Olov Brodersen
geboren am 13.12.1977
aus Erfurt

Eingereicht am 10. März 2011
Disputation am 21. Dezember 2011

Berichterstatter Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler
Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael P. Wistuba
Prüfer apl. Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Renken

Braunschweig 2012

ISBN 978-3-926031-12-9

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2012

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verbundmodell zur Beschreibung des thermo-mechanischen Verhaltens von Asphaltmischungen entwickelt und validiert. Das Modell beschreibt das Materialverhalten von Asphalt als Verbundwerkstoff auf Basis der Mischungstheorie. Hierfür ist das Verformungsverhalten der Bindemittelkomponente mit einem fraktionalen rheologischen Modell beschrieben. Die Mineralstoffkomponente wird mit einem Modell der Hypoplastizität erfasst. Mit Hilfe einer Evolutionsstrategie erfolgt die Identifikation der Modellparameter der Einzelkomponenten auf der Grundlage experimenteller Untersuchungen. Für die Validierung des Verbundmodells liegt ein umfangreiches experimentelles Programm vor, bei dem zwei ausgewählte Asphaltmischungen in einaxialen Versuchen untersucht werden. Der Vergleich der Versuche mit Ergebnissen numerischer Simulationen bedingt physikalisch begründete Modifikationen am Verbundmodell. Das modifizierte Modell ermöglicht die Analyse des Verformungsverhaltens realer Strukturen aus Asphaltmaterialien in numerischen Berechnungen mit der Finite-Element-Methode.

Abstract

A model to describe the thermo-mechanical behaviour of asphalt mixtures is developed and validated in this thesis. The model is based on mixture theory and describes the material behaviour of asphalt as a compound material. A fractional rheological model is used to specify the behaviour of the bituminous binder. The mineral component is described by using a hypoplastic material model. An evolutionary strategy is used to identify the parameters of the components by experimental results. The validation of the compound model is based on a sophisticated experimental program where two asphalt mixtures are examined in uniaxial experiments. The comparison of the experimental results with the results of numerical simulations necessitates physically motivated modifications. The modified model can be used to analyse the deformation behaviour of real asphalt road structures in numerical computations using the finite element method.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	v
1 Einleitung	1
2 Asphalt im Straßenwesen	3
2.1 Dimensionierung von Straßenkonstruktionen – Stand der Normung .	4
2.2 Modellierung von Asphaltwerkstoffen – Stand der Forschung	5
2.2.1 Einkomponentenmodelle	5
2.2.2 Mehrskalenmodelle	7
2.2.3 Mehrkomponentenmodelle	7
3 Verbundmodell auf Grundlage der Mischungstheorie	9
3.1 Bilanzgleichungen der Mischungstheorie	9
3.1.1 Massenbilanz	11
3.1.2 Impulsbilanz	13
3.1.3 Drehimpulsbilanz	14
3.1.4 Bilanzgleichungen der Thermodynamik	14
3.2 Grundgleichungen des Verbundwerkstoffs	15
4 Numerische Verfahren	19
4.1 Diskretisierung der Grundgleichungen	19
4.2 Reduzierte Integration	22
4.3 Integration der Werkstoffgleichungen	29
4.3.1 Kollokation	29
4.3.2 Newton-Raphson-Verfahren	30
4.3.3 Algorithmische Differentiation	34
4.3.4 Gedämpftes Newton-Raphson-Verfahren	37
4.3.5 Bestimmung der konsistenten Tangente	39
4.4 Verfahren zur Identifikation der Modellparameter	40
4.4.1 Effiziente Datenhaltung mit HDF5	40
4.4.2 Evolutionsstrategie	40
5 Materialmodell der Bindemittelkomponente	45
5.1 Rheologische Modelle mit fraktionalen Zeitableitungen	45
5.1.1 Herleitung des fraktionalen Elements mit Hilfe einer Operatorformulierung	46

5.1.2	Mathematische Definitionen fraktionaler Ableitungsoperatoren	49
5.1.3	Numerische Lösung fraktionaler Differentialgleichungen . . .	53
5.1.4	Das „nested mesh“-Prinzip	54
5.1.5	Vergleich fraktionaler Modelle	56
5.1.6	Norton-Ansatz für das fraktionale Maxwell-Element	61
5.1.7	Beschreibung der Temperaturabhängigkeit	62
5.2	Versuchsprogramm und Parameteridentifikation	63
5.2.1	Zug- und Druckversuche	64
5.2.2	Kriechversuche	66
5.2.3	Identifikation der Modellparameter	66
5.3	Mehraxiale Formulierung des fraktionalen Maxwell-Modells	70
5.4	Reduzierte Integration	72
6	Materialmodell der Mineralstoffkomponente	75
6.1	Eigenschaften mineralischer Zuschläge	75
6.2	Materialmodell für hypoplastisches Materialverhalten	76
6.2.1	Materialmodell nach VON WOLFFERSDORFF	77
6.2.2	Konzept der intergranularen Dehnung	81
6.2.3	Modifikation der Spannungsfunktion F	85
6.3	Identifikationsergebnisse und Modellparameter	86
6.4	Numerische Lösung der nichtlinearen Materialgleichungen	90
7	Verbundmodell	93
7.1	Bestimmung der Volumenanteile des Verbundmodells	93
7.2	Vergleich experimenteller Ergebnisse mit Simulationsergebnissen des Verbundmodells	95
7.3	Modifikationen am Verbundmodell	98
7.4	Versuchsprogramm	101
7.4.1	Parameteridentifikation	103
7.4.2	AB 11 – Vergleich von Simulation und Experiment	106
7.4.3	SMA 11 – Vergleich von Simulation und Experiment	109
7.5	Variation der Volumenanteile	112
8	Numerische Simulation realer Strukturen	115
8.1	Stempeleindringversuch	115
8.1.1	Einfluss der Variation der Volumenanteile	128
8.1.2	Einfluss der reduzierten Integration	130
8.2	Straßenkonstruktion	131
8.2.1	Temperaturbeanspruchung	132
8.2.2	Kombinierte Beanspruchung	135
9	Zusammenfassung und Ausblick	141

A	Anhang	153
A.1	Tensoroperatoren	153
A.2	Matrix-Formen	154
A.3	Modellparameter	155

Bezeichnungen

Allgemein

sym	Symmetrisierungsoperator
Grad	Operator der räumlichen Ableitung bzgl. der Referenzkonfiguration
grad	Operator der räumlichen Ableitung bzgl. der aktuellen Konfiguration
$:$	tensorielle Kontraktion
D^α	fraktionaler Ableitungsoperator der Ordnung α
\mathcal{T}	Heaviside-Operator

Skalare

n^α	Volumenanteil der Komponente α
ω^α	Massenanteil der Komponente α
ρ^α	Partialdichte der Komponente α
$\hat{\rho}^\alpha$	wahre Dichte der Komponente α
I_D^2	2. Invariante des Deviators
δ_{ij}	Kronecker-Delta

Tensoren

\mathbb{D}	Deviatoroperator nach (A.11)
\mathbb{V}	Kugelteiloperator nach (A.7)
\mathbb{C}	Tangentialoperator
\mathbf{T}	Cauchy-Green Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	linearer Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}^\alpha$	Partialspannung der Komponente α
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Dehnungstensor

Matrizen und Vektoren

D	Matrixform des Deviatoroperators nach (A.19)
V	Matrixform des Kugelteiloperators nach (A.20)
$\underline{\sigma}$	Spannungstensor in Voigt-Form
$\underline{\varepsilon}$	Dehnungstensor in Voigt-Form
\underline{q}	Vektor der inneren Größen
\underline{u}	Verschiebungsvektor
\underline{v}	Geschwindigkeitsvektor
\underline{e}_i	Einheitsvektor

J	Tangentialmatrix des Newton-Raphson-Verfahrens
\underline{R}	Residuumsvektor
\underline{C}	Tangentialmatrix der Finite-Element-Methode (konsistente Tangente)
B	B-Matrix der Finite-Element-Methode (vgl. Anhang A.2)
K_e	Elementsteifigkeitsmatrix
\underline{i}_e	Vektor der inneren Kräfte

Indizes

$()^b$	Bindemittelkomponente
$()^m$	Mineralstoffkomponente
$()^p$	Porenraum
$()_e$	Elementgröße
$()_R$	Größen der reduzierten Integration
$()_F$	Größen der vollständigen Integration
$()^V$	volumetrischer Anteil
$()^D$	deviatorischer Anteil
$()^k, ()^{k+1}$	Größe im Iterationsschritt ...
$()_j, ()_{j+\xi}$	Größe zum Zeitpunkt ...
$()^\alpha$	Ordnung α der fraktionalen Ableitung
$()_{el}$	elastischer Anteil
$()_{ve}$	visko-elastischer Anteil
$()_{vp}$	visko-plastischer Anteil
$()_0, ()^0$	Bezugsgrößen
$()_v$	Vergleichsgrößen
$()_{gp}$	am Gaußpunkt ausgewertete Größen

Bezeichnung der Asphaltmischungen

Im Zuge der Vereinheitlichung im europäischen Raum haben sich die Bezeichnungen von Asphaltmischungen geändert. Die in dieser Arbeit verwendeten alten Bezeichnungen entsprechen den hier angegebenen neuen Bezeichnungen:

Asphaltmischung	alte Bezeichnung	neue Bezeichnung
Asphaltbeton	AB 11	AC 11 D
Splittmastixasphalt	SMA 11	SMA 11
Asphalttragschicht	ATS	AC T
Asphaltbinderschicht	ABi	AC B
Offenporiger Asphalt	OPA	PA

Materialparameter

Allgemein

W_A	Temperaturabhängigkeit der Größe A
W_A^l	Temperaturabhängigkeit der Größe A – linearer Anteil
W_A^q	Temperaturabhängigkeit der Größe A – quadratischer Anteil
\hat{A}	Modifikationsparameter für die Größe A

Bindemittel

E_{el}	Elastizitätsmodul der linearen Feder
ν_{el}	Querdehnzahl der linearen Feder
E_{vp}	Elastizitätsmodul des fraktionalen Elements
$\dot{\epsilon}_{vp}^0$	Bezugsdehnrate
σ_{vp}^0	Bezugsspannung
n_{vp}	Norton-Parameter
α_{vp}	Ableitungsordnung des fraktionalen Elements

Mineralstoff

φ_c	kritischer Reibungswinkel
h_s	Granulathärte
e_{d0}, e_{c0}, e_{i0}	Grenzporenzahlen
n, α, β	Exponenten
R	Aktionsbereich der intergranularen Dehnung
m_T, m_R	Faktoren zur Skalierung der Steifigkeit
β_r, χ	Steuerungsparameter

Abweichende Definitionen sowie nicht aufgeführte Größen sind im Text erläutert.

1 Einleitung

Die Dimensionierung von Straßenquerschnitten erfolgt zur Zeit vorwiegend auf Grundlage empirischer Ansätze sowie auf Basis von Erfahrungswerten aus Bau und Nutzung von Verkehrsflächenbefestigungen. Empirische Ansätze ohne direkten Bezug zum komplexen nichtlinearen Materialverhalten von Asphaltmischungen können jedoch die für Tragfähigkeits- und Gebrauchstauglichkeitsnachweise sowie Lebensdaueranalysen erforderlichen Informationen und Daten nur im begrenzten Umfang liefern. Dadurch kann mitunter zur Überdimensionierung kommen, was zu unwirtschaftlichen und nicht nachhaltigen Lösungen führt.

Besser geeignet sind computergestützte Berechnungsverfahren auf Basis physikalisch begründeter Modelle, die das Deformationsverhalten des Verbundwerkstoffs Asphalt sowie den Schichtaufbau realer Straßenquerschnitte berücksichtigen können. Die Untersuchung und die Prognose des Trag- und Verformungsverhaltens über Strukturberechnungen mit modernen numerischen Verfahren ist möglich, wenn Materialmodelle für das komplexe thermo-mechanische Verhalten des Verbundwerkstoffs Asphalt vorliegen.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Modells für das Materialverhalten von Asphalt als Verbundwerkstoff der Komponenten Bindemittel, Mineralstoff und Porenraum. Die Formulierung als Mehrkomponentenwerkstoff bietet den Vorteil, die mikrophysikalischen Prozesse sowie die Wechselwirkungen zwischen den Komponenten als Einzelphänomene mit internen Variablen beschreiben zu können. Zudem können über die Variation der Volumenanteile der Einzelkomponenten verschiedene Mischungsverhältnisse mit einem einheitlichen Modell abgebildet werden.

Die grundlegenden Eigenschaften des Baustoffs Asphalt werden in Kapitel 2 vorgestellt. Zudem werden die derzeit gebräuchlichen Dimensionierungsmethoden im Straßenwesen angegeben und Ansätze für die Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens von Asphaltmischungen miteinander verglichen. Im Anschluss werden die theoretischen Grundlagen des entwickelten Verbundmodells auf Basis der Mischungstheorie in Kapitel 3 dargestellt.

Für die numerische Analyse von Asphaltstraßenkonstruktionen sind geeignete Berechnungsverfahren einzusetzen. Die Spannungs-Verformungs-Analyse unter Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens führt zu einem gekoppelten Anfangs-Randwertproblem, welches mit Hilfe der Finite-Element-Methode effizient gelöst

werden kann. Die Identifikation der Modellparameter stellt ein aufwendiges Optimierungsproblem dar, welches sich mit Hilfe von Evolutionsstrategien numerisch lösen lässt. Die für die Strukturberechnung als auch die Identifikation und Validierung der Modellparameter eingesetzten numerischen Verfahren sind in Kapitel 4 zusammengefasst.

Die Beschreibung des viskosen temperaturabhängigen Materialverhaltens der Bindemittelkomponente erfolgt mit rheologischen Modellen, welche fraktionale Zeitableitungen enthalten. Die mathematischen Grundlagen derartiger Modelle sind in Kapitel 5 ebenso dargestellt wie die Identifikation der Modellparameter des Bindemittels anhand eines umfangreichen experimentellen Programms.

Das Materialverhalten der Mineralstoffkomponente wird mit einem hypoplastischen Materialmodell erfasst, welches in Kapitel 6 vorgestellt wird. Die Identifikation der Modellparameter erfolgt anhand von Standardlaborversuchen der Geotechnik. Die notwendige Erweiterung des klassischen hypoplastischen Modellansatzes um das Konzept der intergranularen Dehnungen wird dargestellt.

Das in Kapitel 3 vorgestellte Verbundmodell kann das Materialverhalten des Verbundwerkstoffs Asphalt nur unzureichend beschreiben. Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass der Verbundwerkstoff Asphalt wesentlich andere Verformungseigenschaften aufweist als die Summe seiner Einzelkomponenten. Die Defizite des Modellansatzes werden in Kapitel 7 erläutert, zudem werden mechanismenbegründete Parametermodifikationen vorgestellt, mit denen es gelingt, das Materialmodell an experimentelle Ergebnisse anzupassen.

Das modifizierte Mehrkomponentenmodell ermöglicht die Untersuchung des Verformungsverhaltens realer Strukturen aus Asphaltmaterialien in numerischen Berechnungen mit der Finite-Element-Methode. Neben der Simulation von Stempel Eindringversuchen an verschiedenen Asphalten wird in Kapitel 8 das Verhalten eines Straßenquerschnitts unter kombinierter thermo-mechanischer Beanspruchung analysiert.

2 Asphalt im Straßenwesen

Der heterogene Verbundwerkstoff Asphalt besteht aus einer Gesteinskörnung, welche mit Bitumen verklebt ist. Er wird im Straßenbau in geschichteten Straßenkonstruktionen verwendet. In dieser Bauweise sind zur Zeit mindestens 80 % der gebundenen Straßenbefestigungen in Deutschland ausgeführt.

Die im Straßenbau verwendeten Gesteinskörnungen werden auch als Mineralstoffgemische bezeichnet und bestehen aus gebrochenem Kies oder Felsgestein. Der Mineralstoff wird durch Siebung nach einzelnen Korngrößen, den sogenannten Kornfraktionen, getrennt. Die einzelnen Fraktionen werden dann im gewünschten Mischungsverhältnis wieder zusammen gemischt. Dabei bestimmt der Anteil der einzelnen Kornfraktionen die Eigenschaften des Verbundwerkstoffs Asphalt maßgeblich.

Gleichmäßig gestufte Gesteinskörnungsmische, bei denen die einzelnen Kornfraktionen in etwa gleichen Teilen vorhanden sind, weisen einen geringen Hohlraumgehalt auf und benötigen daher weniger Bitumen zum Verkleben. Die resultierenden Asphaltmischungen sind in allen Schichten des Straßenoberbaus anwendbar und werden je nach Einsatz und Mischungsrezeptur als Asphaltbeton- (AB), Asphaltbinder- (ABi) oder Asphalttragschichtmischgut (ATS) bezeichnet. Ihr Tragverhalten ist maßgeblich von Korn-zu-Korn-Kontakten geprägt.

Mineralstoffgemische mit einem hohen Anteil einzelner Kornfraktionen werden als ungleichförmig gestufte Gesteinskörnungsmische bezeichnet. Asphaltmischungen auf Basis dieser Mineralstoffgemische benötigen aufgrund ihres größeren Hohlraumgehalts mehr Bindemittel. Sie werden als Splittmastixasphalt (SMA) oder Offenporiger Asphalt (OPA) bezeichnet. Aufgrund ihrer besonderen Struktur ergeben sich Vorteile hinsichtlich der Wasserdurchlässigkeit oder der Oberflächenbeschaffenheit. Diese Mischgutsorten werden als Deckschichten in Asphaltstraßenkonstruktionen eingesetzt.

Im Straßenbau kommt als Bindemittel Bitumen zum Einsatz, welches in einem mehrstufigen Destillationsprozess aus Rohöl gewonnen wird. Das Bindemittel verklebt die Einzelkörner des Mineralstoffgemischs zum Verbundmaterial. Aufgrund seines viskosen Charakters und der starken Temperaturabhängigkeit bestimmt das Bindemittel das stark zeit- und temperaturabhängige Materialverhalten des Verbundwerkstoffs Asphalt maßgeblich. Neben dem Bitumen werden zunehmend Polymermodifizierte

Bitumen (PmB) als Bindemittel eingesetzt, bei denen die gezielte Zugabe verschiedenartiger Polymere das Gebrauchsverhalten wesentlich verbessern kann.

Asphaltmischgut wird in Mischanlagen produziert. Dabei wird dem getrockneten und erhitzten Mineralstoffgemisch entsprechend der gewünschten Zusammensetzung Bindemittel beigemischt. Nach dem Transport zur Einbaustelle wird das Asphaltmischgut in der Regel von Straßenfertigern aufgebracht und vorverdichtet. In einem intensiven Nachverdichtungsprozess mit Hilfe von Walzen wird anschließend die notwendige Festigkeit erzielt.

2.1 Dimensionierung von Straßenkonstruktionen – Stand der Normung

Die Bemessung von Straßenquerschnitten erfolgt in Deutschland zur Zeit hauptsächlich auf Grundlage der RStO 01 – „Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaues von Verkehrsflächen“ [100]. Diese geben in ihrer aktuellen Fassung Verfahren an, mit deren Hilfe die Beanspruchung eines Straßenquerschnitts aufgrund eines Beanspruchungsgrades abgeschätzt werden kann. Der bestimmte Beanspruchungsgrad bildet die Grundlage für die Auswahl einer Bauweise anhand von Tabellen. Die Eignung der angegebenen Bauweisen wird hierbei aufgrund langjähriger Erfahrungen vorausgesetzt.

Der Beanspruchungsgrad wird aus einer bemessungsrelevanten Beanspruchung unter der Berücksichtigung örtlicher Verhältnisse in Bezug auf klimatische Bedingungen, der Lage des Straßenquerschnitts sowie der vorliegenden Wasserverhältnisse bestimmt. Zusätzlich fließen auch der geplante Nutzungszeitraum, die durchschnittliche Verkehrsstärke sowie die Geometrie des Straßenquerschnitts in die Bestimmung des Beanspruchungsgrades ein.

Die empirische Bemessung nach der RStO berücksichtigt die hochgradig nicht-linearen Materialeigenschaften sowohl des Verbundwerkstoffs Asphalt als auch der ungebundenen Tragschichten nicht explizit, sondern nur indirekt aufgrund der empirischen Bewährung von standardisierten Bauweisen. Zudem kommt es bei dieser Bemessungsmethode mitunter zur Überdimensionierung, was nicht nur zu unwirtschaftlichen Lösungen führt, sondern sich auch im Hinblick auf die zunehmend wichtigere Nachhaltigkeit von Bauweisen negativ auswirkt.

In Deutschland sind in den letzten Jahren rechnerische Verfahren zur Dimensionierung von Straßenquerschnitten bis zur Anwendungsreife entwickelt worden. Diese Verfahren sind durch die RDO ASPHALT 09 – „Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdeckschicht“ [98] bereits Bestandteil des technischen Regelwerks für das Straßenwesen. Bei der Anwendung dieser Richtlinien erfolgt die Bestimmung der Beanspruchung maßgeblich

auf Grundlage der Mehrschichtentheorie nach BURMISTER ET AL. [16]. Voraussetzung für die Verwendung dieser Bemessungsmethode sind nicht nur Beschränkungen auf spezielle Geometrie- und Belastungsbedingungen, sondern auch die Annahme eines linear elastischen oder linear visko-elastischen Materialverhaltens des geschichteten Straßenkörpers.

Da die im Verkehrswegebau eingesetzten Materialien in der Regel hochgradig nicht-lineares Materialverhalten aufweisen und reale Straßenkonstruktionen komplexe Strukturen unter vielfältigen Belastungsbedingungen darstellen, führen die notwendigen Einschränkungen zu teilweise erheblichen Abweichungen zwischen dem berechneten und dem realen Verformungsverhalten. Über die Einführung von Sicherheitsbeiwerten lassen sich diese modellbedingten Unsicherheiten soweit eliminieren, dass vorzeitige Schäden ausgeschlossen werden können. Obwohl dies zumindest teilweise zu unwirtschaftlichen Lösungen führt, stellt die rechnerische Dimensionierung auf Grundlage der Mehrschichtentheorie einen wichtigen Schritt von der empirischen zur strukturorientierten Bemessung dar.

2.2 Modellierung von Asphaltwerkstoffen – Stand der Forschung

Die Beschreibung des Verhaltens von Straßenkonstruktionen mit numerischen Methoden wie der Finite-Element-Methode (vgl. Abschnitt 4.1) kann sowohl das nicht-lineare Materialverhalten als auch beliebige Geometrien und Belastungsbedingungen berücksichtigen. Dies ermöglicht präzisere Prognosen zur Lebensdauervorhersage und kann zu wirtschaftlicheren und nachhaltigeren Lösungen bei der Dimensionierung von Straßenquerschnitten führen.

Die numerische Simulation von Asphaltstraßenkonstruktionen unter thermo-mechanischer Beanspruchung bedingt die Formulierung konstitutiver Modelle, welche das komplexe mehrdimensionale Materialverhalten der einzelnen Schichten des Straßenbaus wiedergeben können. Die aktuell dafür existierenden Ansätze können in drei grundlegende Beschreibungsformen eingeteilt werden.

2.2.1 Einkomponentenmodelle

Einkomponentenmodelle idealisieren den heterogenen Verbundwerkstoff Asphalt zu einem homogenen Medium, dessen Verformungsverhalten hauptsächlich über rheologische Modelle und kontinuumsmechanisch begründete Ansätze beschrieben wird.

Die Beschreibung des viskosen Materialverhaltens mit Hilfe rheologischer Modelle ist weit verbreitet, da diese Modelle aufgrund ihrer Anschaulichkeit sehr gut erweitert

werden können. Sie ermöglichen die Beschreibung auf phänomenologischer Ebene, bei der einzelne Phänomene wie z. B. elastisches und viskoses Materialverhalten über rheologische Teilkörper beschrieben werden können. Einen ausführlichen Überblick über die rheologischen Grundkörper sowie erweiterte rheologische Modelle gibt u. a. ASCHENBRENNER [4].

Rheologische Modelle auf der Grundlage eines um Reibelemente erweiterten Burgers-Modells werden von KRASS [64] und HUSCHEK [51] vorgestellt. HASE [44] erweitert den Beschreibungsumfang dieser Modelle, indem die viskosen Anteile mit spannungs- und temperaturabhängigen Parametern beschrieben werden. BONNIER [12] verwendet das rheologische Modell des Kelvin-Voigt-Körpers zur Beschreibung visko-elastischer Verformungsanteile unter Verwendung der Fließregel nach KOITER [57] für visko-plastisches Verhalten.

Einen ähnlichen Ansatz verfolgen auch SIDES ET AL. [105] und LU/WRIGHT [79], welche die visko-plastischen Dehnungsanteile mit Hilfe einer assoziierten Fließregel unter Verwendung eines Ansatzes von PERZYNA [93] ermitteln. SOUSA/WEISSMAN [106] stellen ein nichtlineares visko-elastisches Modell mit Schädigungsparametern vor, welches bleibende Verformungen unter der Berücksichtigung von Schubdilatation, Erhöhung des effektiven Schubmoduls unter hydrostatischem Druck, Temperatur- und Ratenabhängigkeit sowie zyklischer Belastung abbilden kann.

Auf den Arbeiten von HUSCHEK und HASE aufbauend entwickelt GARTUNG [37, 38] ein Materialmodell, welches das Verformungsverhalten von Asphalt mit Hilfe eines erweiterten Burgers-Körpers modelliert. Die Modellparameter sind in Abhängigkeit der Spannungen und der Temperatur nichtlinear formuliert. Das Modell ist in der Lage, thermo-mechanische Schädigungs- und Heilungsprozesse abzubilden.

OESER [88] beschreibt das Materialverhalten von Asphalt mit einem rheologischen Modell auf der Basis eines Burgers-Körpers. Das Materialmodell ist um Ansätze zur Beschreibung von Schädigung und Heilung erweitert. Die Modellparameter sind an die Zug-Schwell-Versuche des Projekts LEUTNER ET AL. [77] angepasst. Numerische Berechnungen von Spaltzugversuchen und Spurrinnenbildungen im Großmaßstab zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Das Modell ist für kleine Verzerrungen einsetzbar. Das Verformungsverhalten der bindemittelfreien Schichten des Straßenaufbaus wird mit einem Stoffmodell für elasto-plastisches Materialverhalten beschrieben. Die Kopplung des geschichteten Straßenaufbaus mit dem angrenzenden Erdreich erfolgt mit Hilfe der Randelementemethode. Die Genauigkeit des Modells kann durch die Verwendung fraktionaler rheologischer Elemente verbessert werden, OESER ET AL. [89].

Neben der Beschreibung des Materialverhaltens von Asphalt mit rheologischen Modellen werden zunehmend kontinuumsschädigungsbasierte Modelle (z. B. PARK ET AL. [92]) angewendet. LEE ET AL. [74] weisen darauf hin, dass kombinierte visko-elastisch-kontinuumsschädigungsmechanische Ansätze grundsätzlich geeignet sind,

Heilung, Ermüdung und ratenabhängige Effekte abzubilden. Derartige Modelle, die auf der „work potential“-Theorie von SCHAPERY [102] beruhen und das ebenfalls aus Arbeiten von SCHAPERY [101] stammende Korrespondenzprinzip anwenden, werden z. B. von KIM ET AL. [55] und LEE/KIM [75] vorgestellt.

Einkomponentenmodelle können das Verformungsverhalten von Asphalt oft sehr präzise wiedergeben. Die Parametersätze dieser Modelle sind jedoch immer nur für eine bestimmte Asphaltmischung charakteristisch und müssen bei einer Variation des Mischungsverhältnisses oder bei einer Veränderung der Mineralstoff- oder Bindemittelkomponente (z. B. Änderung der Sieblinie oder der Bitumenklasse) anhand von Laborversuchen neu bestimmt werden. Zudem können Einkomponentenmodelle Inhomogenitäten innerhalb von Asphaltmischungen wie variierende Verdichtungsgrade nur unzureichend erfassen.

2.2.2 Mehrskalenmodelle

LACKNER ET AL. [72] entwickeln ein hierarchisches Mehrskalenmodell zur Charakterisierung der thermo-mechanischen Eigenschaften von Asphalt. Das Modell betrachtet den Verbundwerkstoff Asphalt auf mehreren Skalen, ausgehend vom Bindemittel über die Mastix-Ebene (Bindemittel mit Feinstkornanteil) bis zum Asphaltgemisch auf makroskopischer Ebene. Die Beschreibung der einzelnen Skalen kann mit komplexen Materialmodellen erfolgen, so verwenden z. B. JÄGER ET AL. [52] fraktionale rheologische Modelle zur Beschreibung des Bindemittels auf der nanoskopischen Ebene. Die notwendigen Materialparameter werden mit Hilfe der Nanoindentierung bestimmt. Die Homogenisierung der Steifigkeiten und der thermischen Eigenschaften von einer Betrachtungsebene zur nächst höheren erfolgt mit dem Modell von MORI/TANAKA [83]. Bei diesem Homogenisierungsprozess werden lineare Elastizität und Viskoelastizität angesetzt, wobei die nichtlinearen Effekte der niedrigeren Ebenen nicht vollständig auf die höhere Ebene übertragen werden können. Der teilweise extrem hohe Berechnungsaufwand bei der Anwendung von Mehrskalenmodellen kann im Zuge der rapide steigenden Rechenleistung zunehmend vernachlässigt werden.

Die Übertragbarkeit des Mehrskalenmodells auf zementgebundene Baustoffe zeigen PICHLER ET AL. [94]. Den Ansatz eines Mehrskalenmodells auf Basis der Diskrete-Element-Methode stellen ABBAS ET AL. [1] vor.

2.2.3 Mehrkomponentenmodelle

Mehrkomponentenmodelle beschreiben das Materialverhalten von Verbundwerkstoffen auf Grundlage der Mischungstheorie. Die einzelnen Bestandteile der Mischung werden hierbei mit Materialmodellen beschrieben, die das nichtlineare Verhalten

der Einzelkomponenten zutreffend wiedergeben können. Über die Definition von Interaktionsbeziehungen werden diese Einzelmodelle zu einem Verbundmodell kombiniert. Der entscheidende Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Materialparameter für die Grundkomponenten separat bestimmt werden und somit Mischungen aus diesen Komponenten auch bei variierenden Mischungsverhältnissen beschrieben werden können. Mehrkomponentenmodelle werden bereits erfolgreich in der Modellierung von porösen Medien [23, 9, 22], in der Biomechanik [54, 107] oder der Simulation von Deponiebauwerken [99, 63] eingesetzt.

KRISHNAN/RAO [67, 68] entwickeln ein Mehrkomponentenmodell für Asphalt, bei dem die Komponenten Bitumen, Korngerüst und Luftporenraum unter der Vernachlässigung thermischer Effekte und chemischer Reaktionen modelliert werden. Die Lösung der Erhaltungsgleichungen erfolgt mit dem Finite-Volumen-Verfahren. Dieser Ansatz wird von KRISHNAN ET AL. [66] auf die Beschreibung sandhaltiger Asphalte übertragen.

Mehrkomponentenmodelle eignen sich insbesondere zur Beschreibung der Interaktion von Asphaltmischungen mit zusätzlichen Bestandteilen wie Porenwasser oder Poreneis, da die Formulierungen offen für die Erweiterung um zusätzliche Komponenten sind. KRINGOS [65] stellt einen derartigen Ansatz vor, das Modell beschreibt die Interaktionsphänomene zwischen Porenwasser und den festen Partikeln von Asphaltmischungen. Es ist in der Lage, Strömungsvorgänge von Porenwasser in ungebundenen sowie gebundenen Tragschichten zu simulieren. Dabei können sowohl physikalische als auch chemische Schädigungsvorgänge berücksichtigt werden.

Grundlage der hier vorgestellten Arbeit ist das von ASCHENBRENNER [4] entwickelte Mehrkomponentenmodell, das die Analyse mehrschichtiger Straßenkonstruktionen mit einem einheitlichen Konzept ermöglicht. Das Modell beschreibt den Verbundwerkstoff Asphalt über die Komponenten Bindemittel, Mineralstoff und Porenraum. Die Beschreibung des Materialverhaltens der Bindemittelkomponente erfolgt mit einem rheologischen Modell, das fraktionale Zeitableitungen enthält und Schädigung sowie Heilung berücksichtigen kann. Das nichtlineare Verhalten des Mineralstoffs wird mit einem hypoplastischen Materialmodell erfasst.

Während die Materialparameter der Mineralstoffkomponente anhand eines speziell für diese Mineralstoffmischung durchgeführten experimentellen Programms bestimmt sind, liegen ASCHENBRENNER keine Versuche am reinen Bindemittel vor. Die Modellparameter des fraktionalen Materialmodells werden mit Hilfe von Zugversuchen an Asphaltproben unter der Annahme ermittelt, dass im Zugbereich allein die Bindemittelkomponente das Tragverhalten bestimmt. Daher ist die Bestimmung dieser Materialparameter mit Hilfe eines speziell auf das Verbundmodell angepassten, umfangreichen Versuchsprogramms ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit. Zudem werden sowohl Materialmodelle der Einzelkomponenten als auch das Verbundmodell näher untersucht und an neue Erkenntnisse angepasst.

3 Verbundmodell auf Grundlage der Mischungstheorie

Die Beschreibung des Materialverhaltens mit Mehrkomponentenmodellen ermöglicht, die charakteristischen Mischungseigenschaften von Asphalt direkt in der Modellentwicklung zu berücksichtigen. Das dieser Arbeit zugrunde liegende Verbundmodell auf Grundlage der Mischungstheorie (ASCHENBRENNER [4]) beschreibt das Verbundverhalten über das Verhalten der Einzelkomponenten Bindemittel und Mineralstoff sowie über deren Volumenanteile an der Mischung. Das Modell kann Änderungen in der Mischungszusammensetzung erfassen und ermöglicht die Beschreibung mehrschichtiger Straßenkonstruktionen mit einem einheitlichen Konzept.

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen der Mischungstheorie und die Übertragung auf die Modellierung von Asphalt dargestellt. Zudem sind die kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen sowie deren Überführung in ein gekoppeltes Anfangs-Randwertproblem angegeben.

3.1 Bilanzgleichungen der Mischungstheorie

Das Verbundmodell verwendet die maßgeblich von TRUESDELL/TOUPIN [109] entwickelte Mischungstheorie, die heterogen zusammengesetzte Medien mit inneren Wechselwirkungen über den Ansatz superponierter Kontinua beschreiben kann. Die Konstituierenden der Mischung sind über einen Homogenisierungsprozess verschmiert an jedem Materialpunkt vorhanden. Die Annahme superponierter Kontinua mit inneren Freiheitsgraden bedingt, dass jeder Konstituierenden ein unabhängiges Verschiebungsfeld zugeordnet ist. In der klassischen Mischungstheorie können Massenaustauschprozesse zwischen den Komponenten ebenso berücksichtigt werden wie Kopplungsmechanismen für die Bewegungsgrößen, die Impulsbilanz oder die Energiebilanz. Diese Kopplungsprozesse können sowohl durch chemische Reaktionen als auch durch physikalische Austauschprozesse verursacht werden.

BOWEN [13, 14] erweitert die klassische Mischungstheorie um das Konzept der Volumenanteile. Bei diesem Konzept sind die im superponierten Kontinuum verschmiert vorliegenden Konstituierenden des Mischungskörpers über ihren Anteil am Volumen eines makroskopischen Ersatzkörpers definiert. Die um das Konzept der Volumenanteile erweiterte kontinuumsmechanische Mischungstheorie ist die

Grundlage zahlreicher Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens von Verbundwerkstoffen. Besondere Bedeutung hat sie für die von DE BOER/EHLERS [23] entwickelte Theorie poröser Medien (TPM), die die Beschreibung des komplexen Materialverhaltens gesättigter oder teilgesättigter Festkörper ebenso ermöglicht wie die Modellierung des mechanischen Verhaltens zahlreicher Geomaterialien, Polymer- und Metallschäumen sowie Biomaterialien.

Ausgangspunkt der Entwicklung von Verbundmodellen nach der Mischungstheorie ist ein Homogenisierungsprozess, bei dem die maßgeblich an der Mischung beteiligten Komponenten in einem makroskopischen Ersatzkörper identifiziert werden. Der Homogenisierungsprozess sowie die Wahl geeigneter makroskopischer Ersatzkörper, die auch als repräsentative Volumenelemente (RVE) bezeichnet werden, sind ausführlich von HASSANIZADEH/GRAY [45, 46, 47] dargestellt.

Das von ASCHENBRENNER [4] entwickelte Mehrkomponentenmodell beschreibt das Verhalten des Verbundwerkstoffs über einen makroskopischen Ansatz, dem das in Abbildung 3.1 dargestellte RVE zugrunde liegt. Auf der gewählten makroskopischen Ebene besteht der Verbundwerkstoff Asphalt aus den Komponenten Bindemittel, Mineralstoff und Porenraum. Das Materialverhalten dieser Einzelkomponenten kann auf der makroskopischen Ebene mit Hilfe kontinuumsmechanischer Modelle beschrieben werden. Das viskose und hochgradig temperaturabhängige Materialverhalten des Bindemittels wird mit Hilfe rheologischer Modelle, welche fraktionale Zeitableitungen enthalten, beschrieben. Das Materialverhalten des Mineralstoffs als granulares Medium kann zutreffend mit Modellen der Hypoplastizität erfasst werden. Die Beschreibung des Porenraums erfolgt über das Materialmodell des Mineralstoffs.

Die Materialmodelle der Einzelkomponenten werden mit Hilfe der Mischungstheorie zu einem Modell kombiniert, mit dem das Verformungsverhalten des Verbundwerkstoffs über die charakteristischen Eigenschaften der Einzelkomponenten beschrieben werden kann. Dieser Homogenisierungsprozess führt zu dem dargestellten superponierten Kontinuum, bei dem die Komponenten über ihren Anteil am Gesamtvolumen des repräsentativen Volumenelements charakterisiert sind.

Das superponierte Kontinuum existiert an jedem Raumpunkt des aktuellen Zustands zum Zeitpunkt $t = t_1$ gleichermaßen. In der klassischen Mischungstheorie können sich die Verschiebungen der Einzelkomponenten unabhängig voneinander einstellen. Das superponierte Kontinuum besteht dann lediglich zum Zeitpunkt $t = t_1$ aus jenen Konstituierenden α , welche durch ihre Lage in der Ausgangskonfiguration \underline{X}^α gegeben sind. Für einen späteren Zeitpunkt $t = t_2$ existiert die Mischung in dieser Form nicht mehr.

Bei Asphalt kann es lediglich im Hochtemperaturbereich zu Entmischungsvorgängen kommen, bei dem sich das Bindemittel vom Mineralstoff löst und teilweise an der Oberfläche absetzt. Im maßgeblichen Gebrauchstemperaturbereich kann aufgrund der Klebewirkung eine einheitliche Verschiebung der Einzelkomponenten

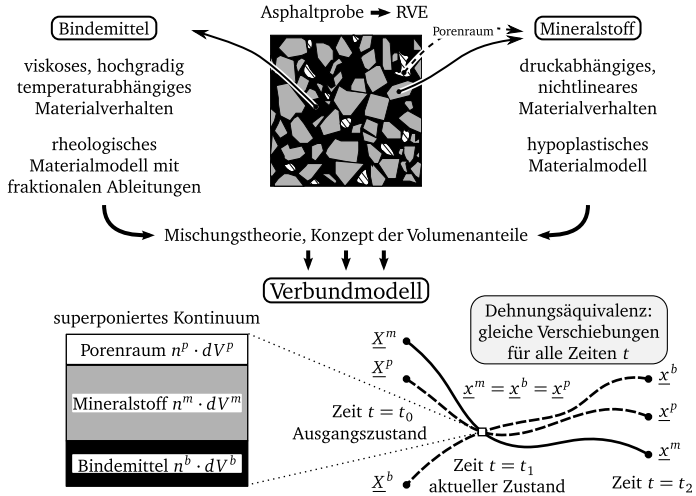


Abbildung 3.1: Verbundmodell auf Grundlage der Mischungstheorie

angenommen werden. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit eine Dehnungsäquivalenz vorausgesetzt, so dass die Mischung zu jeder Zeit aus identischen Komponenten besteht und alle Komponenten und der Mischungskörper einer einheitlichen Verschiebungsfunktion folgen.

Die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen für den Erhalt von Masse, Impuls, Drall und Energie sind im Rahmen der Mischungstheorie für die Mischung selbst und für die einzelnen Komponenten zu formulieren. Im Folgenden werden die Gleichungen und die sich daraus ergebenden Schlussfolgerungen zusammengefasst dargestellt. Einen wesentlich detaillierteren Einblick in die Formulierung der Erhaltungssätze der Mischungstheorie und in die dafür benötigten kontinuumsmechanischen Grundlagen geben z. B. BOWEN [13] oder DE BOER/EHLERS [23].

3.1.1 Massenbilanz

Die in Abbildung 3.1 eingeführten Volumenanteile n^b , n^m und n^p berücksichtigen den Anteil der Komponenten am Gesamtvolumen und sind über

$$n^\alpha = \frac{dV^\alpha}{dV} \quad \text{mit} \quad \alpha = b, m, p \quad (3.1)$$

definiert. Die auch als Partialvolumina bezeichneten Volumenanteile müssen in der Summe das RVE vollständig ausfüllen. Dies wird mit der Sättigungsbedingung

$$\sum_{\alpha=b,m,p} n^{\alpha} = n^b + n^m + n^p = 1 \quad (3.2)$$

wiedergegeben. Mit Hilfe der Volumenanteile kann eine Beziehung zwischen den Partialdichten ρ^{α} und den wahren Dichten $\hat{\rho}^{\alpha}$ der einzelnen Komponenten aufgestellt werden. Sie ist über

$$\rho^{\alpha} = \frac{dm^{\alpha}}{dV} \quad \text{und} \quad \hat{\rho}^{\alpha} = \frac{dm^{\alpha}}{dV^{\alpha}} \quad (3.3)$$

mit Hilfe der Partialmassen m^{α} der Komponenten α definiert. Die Partialdichten können hierbei über die Volumenanteile mit den wahren Dichten ausgedrückt werden

$$\rho^{\alpha} = \frac{dm^{\alpha}}{dV^{\alpha}} \frac{dV^{\alpha}}{dV} = \hat{\rho}^{\alpha} \cdot n^{\alpha} . \quad (3.4)$$

Die Dichte des Mischungskörpers folgt aus der Summe der Partialdichten zu

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm^b}{dV} + \frac{dm^m}{dV} + \frac{dm^p}{dV} = \sum_{\alpha=b,m,p} \rho^{\alpha} . \quad (3.5)$$

Für das dieser Arbeit zugrunde liegende Verbundmodell kann bei einer im Vergleich zur Dichte von Bitumen und Mineralstoff zu vernachlässigenden Dichte der luftgefüllten Porenkomponente die Dichte der Asphaltmischung mit

$$\rho \approx \hat{\rho}^b \cdot n^b + \hat{\rho}^m \cdot n^m \quad (3.6)$$

angegeben werden.

Die Mischungstheorie kann den Massenaustausch zwischen den Komponenten infolge chemischer Prozesse oder durch Phasenübergänge berücksichtigen, die Gesamtmasse des Mischungskörpers muss dabei erhalten bleiben. Bei Asphaltwerkstoffen ist der Massenaustausch zwischen den Komponenten jedoch ausgeschlossen, daher nehmen sowohl die Partialmassenbilanzen als auch die Massenbilanz der Mischung die Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (3.7)$$

an. Infolge der vereinfachenden Annahme einer Dehnungsäquivalenz der Komponenten Bitumen und Mineralstoff und des damit verbundenen einheitlichen Verschiebungszustands kann die Mischung im Rahmen einer Lagrangeschen Betrachtungsweise beschrieben werden. Somit ist die Massenbilanz a priori erfüllt und muss im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

3.1.2 Impulsbilanz

Im Rahmen der Mischungstheorie können bei der Formulierung der Partialimpulsbilanzen Terme berücksichtigt werden, welche den Impulsaustausch zwischen den Komponenten widerspiegeln. Der Impulsaustausch muss hierbei in der Summe für die Bilanzgleichung der Mischung Null ergeben. Für das verwendete Verbundmodell werden derartige Interaktionsterme aufgrund der Dehnungsäquivalenz ausgeschlossen. Das Modell ist zudem auf die Beschreibung quasi-statischer Zustände beschränkt, wodurch die Massenträgheiten sowohl in den Partialbilanzen als auch in der Mischungsbilanz vernachlässigt werden können. Somit müssen neben der Impulsbilanz der Mischung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \quad (3.8)$$

die Partialimpulsbilanz für die Mineralstoffkomponente

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^m + \rho^m \underline{\underline{b}}^m = \underline{\underline{0}} \quad (3.9)$$

sowie die Partialimpulsbilanz für die Bindemittelkomponente

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^b + \rho^b \underline{\underline{b}}^b = \underline{\underline{0}} \quad (3.10)$$

erfüllt sein. Die Partialimpulsbilanz für die Komponente Porenraum kann im verwendeten Verbundmodell vernachlässigt werden, da die Partialspannungen $\boldsymbol{\sigma}^p$ in den luftgefüllten Poren im Vergleich zu den Partialspannungen des Mineralstoffs und des Bindemittels sehr klein sind.

Die Impulsbilanzen (3.8)-(3.10) sind in lokaler Form gegeben und müssen jede für sich erfüllt werden. Mit Hilfe der integralen Auswertung der globalen Formen kann eine Beziehung der Gesamtspannungen in Abhängigkeit von den Partialspannungen ermittelt werden, bei der lediglich die Mischungsbilanz als zu erfüllende Bilanzgleichung verbleibt.

Die globale Form der Impulsbilanz der Mischung verlangt, dass die integrale Auswertung der lokalen Form für ein beliebiges Kontrollvolumen dV erfüllt ist, somit gilt

$$\int_V \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \underline{\underline{b}} \right) dV = \underline{\underline{0}}. \quad (3.11)$$

Äquivalent dazu müssen die lokalen Formen der Partialimpulsbilanzen in integraler Form erfüllt sein. Im Gegensatz zu den Größen der Mischung sind die Partialgrößen nur auf dem Partialvolumen $dV^\alpha = n^\alpha \cdot dV$ definiert, womit die globalen Formen der Partialimpulsbilanzen zu

$$\int_{V^\alpha} \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha \underline{\underline{b}}^\alpha \right) n^\alpha \cdot dV = \underline{\underline{0}} \quad (3.12)$$

folgen. Die Volumenanteile der Bindemittelkomponente und des Mineralstoffgemischs sind im verwendeten Verbundmodell konstant, was in der angenommenen Dehnungsäquivalenz und der Tatsache, dass keine Massenaustauschprozesse zwischen den Komponenten stattfinden, begründet ist. Zudem gilt für die Vektoren \underline{b}^a , welche die Gravitationskraft berücksichtigen,

$$\underline{b}^b = \underline{b}^m = \underline{b} . \quad (3.13)$$

Addiert man die globalen Formen der Partialimpulsbilanzen der Bindemittel- und der Mineralstoffkomponente unter den gegebenen Voraussetzungen, so erhält man

$$\int_V \left(\operatorname{div} \left(n^b \boldsymbol{\sigma}^b + n^m \boldsymbol{\sigma}^m \right) + \left(n^b \rho^b + n^m \rho^m \right) \underline{b} \right) \cdot dV = \underline{0} . \quad (3.14)$$

Vergleicht man diese Gleichung unter Berücksichtigung von Gleichung (3.6) mit der globalen Form der Impulsbilanz der Mischung (3.11), erhält man eine Gleichung für die Gesamtspannung

$$\boldsymbol{\sigma} = n^b \boldsymbol{\sigma}^b + n^m \boldsymbol{\sigma}^m , \quad (3.15)$$

bei der sich diese als Summe der mit den Volumenanteilen gewichteten Partialspannungen ergibt.

3.1.3 Drehimpulsbilanz

Die Erhaltung des Drehimpulses führt im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik zu der Bedingung, dass der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ symmetrisch ist. In der Mischungstheorie kann der prinzipielle Austausch von Drehimpulsen zwischen den Komponenten berücksichtigt werden. Im vorliegenden Modell folgt aus dem Erhaltungssatz für den Drehimpuls, aufgrund nicht vorhandener Austauschsterme, die Forderung nach symmetrischen Spannungstensoren sowohl für die Komponenten als auch für die Mischung. Somit gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \boldsymbol{\sigma}^m = (\boldsymbol{\sigma}^m)^T \quad \boldsymbol{\sigma}^b = (\boldsymbol{\sigma}^b)^T . \quad (3.16)$$

3.1.4 Bilanzgleichungen der Thermodynamik

Die Mischungstheorie verlangt äquivalent zur thermodynamisch konsistenten Herleitung klassischer Materialmodelle, dass sowohl die Energiebilanz als auch die Entropieungleichung eingehalten werden.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik postuliert, dass die Energie eines geschlossenen Systems unverändert bleibt. Für rein mechanische Systeme, bei denen keine mechanische Energie, z. B. infolge von Reibungsverlusten, in Wärme umgewandelt

und keine Energie infolge von Wärmeströmen zu- oder abgeführt wird, ist die Energiebilanz a priori erfüllt und muss nicht berücksichtigt werden. Im Rahmen der Mischungstheorie kann der Energieaustausch zwischen den Komponenten über eine Energieproduktionsdichte berücksichtigt werden, welche neben direkten Produktionstermen auch die Energieproduktion infolge von Austauschprozessen der Masse oder des Impulses beinhalten. Im vorliegenden Verbundmodell sind derartige Energieproduktionen ausgeschlossen, womit sich die Summe der Partialenergiebilanzen äquivalent zur Gesamtenergiebilanz ergibt.

Das Verbundmodell ist für Strukturberechnungen an eine instationäre Wärmeleitung gekoppelt. Da diese Kopplung jedoch einseitig erfolgt und somit keine Energie zu- oder abgeführt wird, sondern lediglich eine Änderung der Materialparameter infolge der Temperaturänderung berücksichtigt wird, kann die Energiebilanz auch für das Verbundmodell als a priori erfüllt angesehen werden.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik gewährleistet über die Einhaltung der Entropieungleichung, dass sich keine unphysikalischen Prozesse einstellen. Mit Hilfe der Entropieungleichung kann nicht nur die thermodynamische Konsistenz von Stoffmodellen begründet werden, es lassen sich vielmehr auch Restriktionen zu konstitutiven Annahmen und Modellgleichungen herleiten. Diese von COLEMAN/NOLL [19] motivierte Methodik wird vor allem bei der Modellbildung im Rahmen der TPM intensiv genutzt, vgl. hierzu u. a. DE BOER [22] oder DIEBELS [26].

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf die Auswertung der Entropieungleichung verzichtet. Es wird entsprechend der Ausführungen von ASCHENBRENNER [4] davon ausgegangen, dass bei einer rein mechanischen Betrachtung mit einer angenommenen Dehnungsäquivalenz die thermodynamische Konsistenz des Verbundmodells eingehalten ist, wenn den Materialmodellen der Einzelkomponenten thermodynamisch konsistente Modellgleichungen zugrunde liegen. Den Nachweis der thermodynamischen Konsistenz von Materialmodellen granularer Medien und insbesondere hypoplastischer Modelle führen SVENDSEN ET AL. [108]. Die Konsistenz rheologischer Modelle mit fraktionalen Ableitungen wird von LION [78] nachgewiesen.

3.2 Grundgleichungen des Verbundwerkstoffs

Die Bilanzgleichungen zeigen, dass bei der Annahme einer Dehnungsäquivalenz der Einzelkomponenten allein die Impulsbilanz für den Mischungskörper als Gleichgewichtsbedingung auszuwerten ist. Mit Hilfe der Gleichung (3.15) für die Gesamtspannung als Summe der gewichteten Partialspannungen gelingt es, den Mischungsansatz vollständig auf die Materialebene des Werkstoffmodells zu transformieren. Die Formulierung auf der Werkstoffebene bietet den Vorteil, dass bei der integralen Auswertung der Gleichgewichtsbeziehung mit der Finite-Element-Methode die aus

der Formulierung des Verbundmodells folgende Nichtlinearität nicht in die Linearisierung der schwachen Form einfließt. Die Formulierung des Mischungsansatzes auf der Materialebene bietet zudem den Vorteil, dass die in Abschnitt 4.4 beschriebene Anpassung der Modellparameter sowohl für die Einzelkomponenten als auch für das Verbundmodell mit einem identischen Schema durchgeführt werden kann.

Die Untersuchung von Strukturen, deren Materialverhalten mit dem Verbundmodell beschrieben werden soll, kann über die Lösung eines gekoppelten Anfangs-Randwertproblems erfolgen. Das auf quasi-statische Zustände beschränkte Randwertproblem ist hierfür mit dem Anfangswertproblem auf der Materialebene gekoppelt. Die grundlegenden Gleichungen sind im Folgenden angegeben und kommentiert:

Gleichgewichtsbedingung

Das Randwertproblem kann auf globaler Ebene allein über die aus der Impulsbilanz für den Mischungskörper folgende Gleichgewichtsbedingung beschrieben werden, da die Partialimpulsbilanzen mit der in das Werkstoffmodell transformierten Gleichung (3.15) bei der Annahme einer Dehnungsäquivalenz a priori erfüllt sind.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \underline{\underline{b}} = 0 \quad (3.17)$$

Kinematik

Die Annahme der Dehnungsäquivalenz führt zu identischen Verschiebungsfeldern für die Mischung und die Einzelkomponenten $\underline{u} = \underline{u}^b = \underline{u}^m$. Somit kann die Kinematik allein mit den Verschiebungen \underline{u} der Mischung beschrieben werden. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Entwicklung geeigneter Materialmodelle der Einzelkomponenten und der konzeptionellen Untersuchung des Verbundmodells sowie der Anpassung von Modellparametern an ein umfangreiches Versuchsprogramm. Daher wird im Rahmen der Arbeit auf die Formulierung einer nichtlinearen Kinematik verzichtet und eine lineare Kinematik vorausgesetzt.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{grad} \underline{u} + \operatorname{grad} \underline{u}^T \right) \quad (3.18)$$

Werkstoffmodell

Die Transformation der Mischungscharakteristik auf die Materialebene führt zu einer hochgradig nichtlinearen Formulierung des Werkstoffmodells. Die in die Materialgleichungen des Verbundmodells transformierten Partialspannungen der Bindemittelkomponente $\boldsymbol{\sigma}^b$ und der Mineralstoffkomponente $\boldsymbol{\sigma}^m$ hängen

dabei nichtlinear von den jeweiligen inneren Größen der Materialmodelle \underline{q}^b bzw. \underline{q}^m ab.

Im Gegensatz zu einer Auswertung der Gleichung (3.15) in schwacher Form stellt die Formulierung der Spannungsbilanz auf der Werkstoffebene eine wesentlich strengere Forderung dar, was bei der numerischen Auswertung des Werkstoffmodells berücksichtigt werden muss. Die Materialmodelle der Einzelkomponenten sind in der Regel ratenabhängig formuliert, wodurch die Materialgleichungen ein Anfangswertproblem darstellen.

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}, t) = n^m \boldsymbol{\sigma}^m + n^b \boldsymbol{\sigma}^b \quad (3.19)$$

Hierbei gilt für die Volumenanteile und die Partialspannungen:

$$n^m = f(\boldsymbol{\varepsilon}); \quad \boldsymbol{\sigma}^m = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^m, t, \underline{q}^m); \quad n^b = f(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{ und } \boldsymbol{\sigma}^b = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^b, t, \underline{q}^b).$$

Randbedingungen

Die Reduzierung des Verbundverhaltens auf die Werkstoffebene impliziert, dass die Randbedingungen auf globaler Ebene allein für den Mischungskörper formuliert werden können. Dies stellt jedoch bei der Beschreibung von Asphaltwerkstoffen keinen Nachteil dar, da die Modellierung der Einzelkomponenten des Verbundmodells als Festkörper Verschiebungs- und Krastrandbedingungen für beide Komponenten erfordert. Die Mittelung der Randspannungen über die Volumenanteile ist in der Formulierung der Gesamtspannungen über die gewichteten Partialspannungen in natürlicher Art und Weise enthalten.

$$\underline{u} = \widehat{u} \quad \text{auf dem Rand } \Gamma_u \text{ (Dirichlet-Randbedingung)} \quad (3.20)$$

$$\underline{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \widehat{t} \quad \text{auf dem Rand } \Gamma_\sigma \text{ (Neumann-Randbedingung)} \quad (3.21)$$

Anfangsbedingungen

Im Gegensatz zur Gleichgewichtsbedingung stellen die in Ratenformulierung gegebenen Gleichungen des Werkstoffmodells ein Anfangswertproblem dar. Somit sind sowohl für die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und die Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ als auch für die inneren Größen \underline{q} Anfangsbedingungen zu setzen. Hierbei ist zu beachten, dass die Partialspannungen in der gewählten Formulierung ebenfalls innere Größen darstellen.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t=0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t=0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (3.23)$$

$$\underline{q}(t=0) = \underline{q}_0 \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (3.24)$$

Das gekoppelte Anfangs-Randwertproblem (3.17)-(3.24) stellt ein System aus nicht-linearen Differentialgleichungen und nichtlinearen algebraischen Gleichungen dar. Eine geschlossene analytische Lösung kann für derartige Systeme nur in Sonderfällen angegeben werden. Daher ist der Einsatz numerischer Verfahren notwendig, mit deren Hilfe das gekoppelte System in ein System algebraischer Gleichungen überführt werden kann. Die im Rahmen der Arbeit verwendeten numerischen Ansätze zur Lösung des gekoppelten Anfangs-Randwertproblems werden im folgenden Kapitel dargestellt.

4 Numerische Verfahren

Das in Kapitel 3 vorgestellte Verbundmodell kann in Strukturanalysen eingesetzt werden, wenn geeignete Verfahren zur Lösung des gekoppelten Anfangs-Randwertproblems eingesetzt werden. Im folgenden Abschnitt werden die numerischen Methoden zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen auf der Struktur- und Werkstoffebene beschrieben. Zudem wird eine effiziente Methode zur Bestimmung der Materialparameter anhand von Versuchsergebnissen vorgestellt.

4.1 Diskretisierung der Grundgleichungen

Die Finite-Element-Methode stellt ein robustes Verfahren zur Lösung von gekoppelten Anfangs-Randwertproblemen dar. Die theoretischen Grundlagen und die vielfältigen Erweiterungen zur Beschreibung nichtlinearer Phänomene sowohl auf der Material- als auch auf der Strukturebene sind in zahlreichen Veröffentlichungen angegeben, hierbei sind u. a. AHRENS/DINKLER [2], BATHE [6], BELYTSCHKO ET AL. [8] oder BONET/WOOD [11] zu nennen. Im Folgenden wird der grundlegende Ablauf des Diskretisierungsprozesses dargestellt. Dieser führt zu einer Formulierung, bei der die Auswertung materialabhängiger Größen allein auf der Materialpunktebene notwendig ist.

Die Lösung des gekoppelten Anfangs-Randwertproblems mit Hilfe der Finite-Element-Methode bedingt die Formulierung des Gleichgewichts (3.17) in schwacher Form. Hierfür wird das Gleichgewicht mit einer Wichtungsfunktion multipliziert und der daraus folgende Ausdruck über das Berechnungsgebiet integriert. Im Rahmen dieser Arbeit kommt eine reine Weggrößenformulierung zum Einsatz, bei der die Wichtung einem virtuellen Verschiebungsfeld $\delta \underline{u}$ entspricht (Prinzip der virtuellen Verschiebungen). Somit folgt die schwache Form des Gleichgewichts (3.17) als

$$\int_V \delta \underline{u} \cdot (\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{b}) dV = 0. \quad (4.1)$$

Mit Hilfe der partiellen Integration kann die Gleichung (4.1) in die Form

$$\int_V \underline{\sigma} : \operatorname{grad} \delta \underline{u} dV - \int_V \delta \underline{u} \rho \underline{b} dV - \int_A \delta \underline{u} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dA = 0 \quad (4.2)$$

überführt werden. Diese Form ist einem Arbeitsprinzip äquivalent, da mit

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym} \left(\text{grad } \delta \underline{u} \right) = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \delta \underline{u} + \text{grad } \delta \underline{u}^T \right) \quad (4.3)$$

und $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \text{sym}(\mathbf{B})$ die inneren Arbeiten zu

$$A_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (4.4)$$

und die äußeren Arbeiten zu

$$A_{\text{ext}} = - \int_V \delta \underline{u} \cdot \underline{\rho} \, dV - \int_A \delta \underline{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} \, dA \quad (4.5)$$

folgen. Das Gleichgewicht ist erfüllt, wenn die Summe der inneren und der äußeren Arbeiten null ergibt,

$$0 = A_{\text{int}} + A_{\text{ext}} . \quad (4.6)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in schwacher Form ist eine nichtlineare tensorielle Gleichung, deren Lösung im Allgemeinen nur iterativ z. B. mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens erfolgen kann. Die notwendige Linearisierung muss bei der Annahme einer linearen Kinematik nur für die inneren Arbeiten erfolgen und führt auf die schwache Formulierung

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} \, dV = -A_{\text{int}}^k + A_{\text{ext}}^k . \quad (4.7)$$

Die lineare Form stellt aufgrund von

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^k = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \Delta \underline{u}^k + (\text{grad } \Delta \underline{u}^k)^T \right) \quad (4.8)$$

eine inkrementelle Formulierung für die Verschiebungszuwächse $\Delta \underline{u}^k$ im Iterationsschritt k des gewählten iterativen Verfahrens dar. Der vierstufige Tensor \mathbb{C} folgt aus dem Linearisierungsprozess zu

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.9)$$

und stellt den Tangentialoperator der schwachen Form dar. Die Verschiebungslösung folgt im Rahmen des Newton-Raphson-Verfahrens aus der Summe der Verschiebungszuwächse zu

$$\underline{u} = \sum_k \Delta \underline{u}^k . \quad (4.10)$$

Die linearisierte schwache Form ist im Rahmen dieser Arbeit mit isoparametrischen Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert. Hierbei sind das 3D-Kontinuum, der ebene Verzerrungszustand und rotationssymmetrische Zustände berücksichtigt.

Die Diskretisierung führt auf ein algebraisches Gleichungssystem, dessen Lösung numerisch ermittelt werden kann. Die tensoriellen Größen der Spannung und der Dehnung sind hierfür mit Hilfe der in Abbildung 4.1 abgebildeten Voigt-Schreibweise unter Ausnutzung ihrer Symmetrie in eine Vektorform übertragen.

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \sigma_{zz}; \sigma_{yz}; \sigma_{xz}; \sigma_{xy})^T$$

$$\underline{\epsilon} = (\epsilon_{xx}; \epsilon_{yy}; \epsilon_{zz}; 2\epsilon_{yz}; 2\epsilon_{xz}; 2\epsilon_{xy})^T$$

Abbildung 4.1: Transformation des Spannungs- und des Dehnungstensors in eine vektorielle Form mit der Voigt-Schreibweise

Der vierstufige Tangentialoperator \mathbf{C} (4.9) lässt sich analog in der Matrixform

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\epsilon}} \quad (4.11)$$

darstellen. Die Matrix \mathbf{C} repräsentiert die konsistente Tangentenmatrix, welche die quadratische Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens sichert.

Die Diskretisierung der inneren Arbeiten führt auf den Vektor der inneren Kräfte, welcher sich aus dem über das Elementgebiet integrierte Produkt der Gradientenmatrix \mathbf{B} mit dem Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ ergibt,

$$\underline{i}_e = \int_e \mathbf{B}^T \underline{\sigma} dV_e. \quad (4.12)$$

Die linearisierte Form der inneren Arbeit (4.7) führt zu der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_e = \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e. \quad (4.13)$$

Der Aufbau der Gradientenmatrix \mathbf{B} kann u. a. BELYTSCHKO ET AL. [8] entnommen werden. Die Teilmatrizen \mathbf{B}_a für die Ansatzfunktion des Knotens a sind zusätzlich im Anhang unter A.2 angegeben.

Die Lösung der Integrale über das Elementgebiet erfolgt auf Elementebene mit der numerischen Integration nach Gauß, vgl. hierzu z. B. AHRENS/DINKLER [2]. Mit dem Integrationsverfahren können die Elementsteifigkeitsmatrix und der Vektor

der inneren Kräfte als Summe der an den Stützstellen der numerischen Integration berechneten Größen approximiert werden,

$$\mathbf{K}_e \approx \sum_{gp=1}^{N_{gp}} w_{gp} \mathbf{B}_{gp}^T \mathbf{C}_{gp} \mathbf{B}_{gp} \quad (4.14)$$

$$\dot{\mathbf{i}}_e \approx \sum_{gp=1}^{N_{gp}} w_{gp} \mathbf{B}_{gp}^T \underline{\sigma}_{gp} \quad (4.15)$$

Die Diskretisierung führt dazu, dass die einzigen verbleibenden materialabhängigen Größen auf der Gaußpunktebene der Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ und die Tangentenmatrix \mathbf{C} sind, welche sich in Abhängigkeit vom Dehnungsvektor $\underline{\varepsilon}$ ergeben. Hierbei entspricht die Auswertung der Spannungen auf der Gaußpunktebene genau jener Auswertung eines Anfangswertproblems, die für die Entwicklung von Materialmodellen und für die Identifikation deren Modellparameter auf der Materialpunktebene notwendig ist. Die Berechnung der konsistenten Tangentenmatrix kann ebenfalls im Rahmen dieser Auswertung am Materialpunkt erfolgen.

In Abschnitt 4.3 wird ein Schema zur Lösung des Anfangswertproblems auf der Materialpunktebene vorgestellt, mit dem eine effiziente Berechnung der Spannungen sowohl für die notwendige Identifikation der Modellparameter als auch für die Einbindung in die Finite-Element-Methode möglich ist.

4.2 Reduzierte Integration

Das Materialverhalten von Asphalten ist geprägt von Kriechprozessen. Für die in dieser Arbeit verwendeten Materialmodelle ist dieses viskose Fließen mit volumenkonstanten Dehnungen verbunden. Dadurch kann es in der numerischen Simulation von Kriechprozessen dazu kommen, dass die Verschiebungen insbesondere für grobe Diskretisierungen zu klein wiedergegeben werden. Zudem können Spannungsoszillationen, auch parasitäre Spannungen genannt, auftreten, welche sinnvolle Aussagen über die Materialbeanspruchung erschweren.

Derartige Effekte können Lockingphänomenen zugeordnet werden, welche u. a. in KOSCHNICK [62] ausführlich untersucht und klassifiziert sind. Während zahlreiche Lockingeffekte durch die Verwendung von Elementen mit mindestens quadratischer Ansatzordnung verhindert werden können, tritt das materialabhängige volumetrische Locking unabhängig von der Elementformulierung auf.

Volumetrisches Locking kann mit der von DOHERTY ET AL. [31] erstmals eingesetzten selektiv reduzierten Integration wirkungsvoll verhindert werden. Das Verfahren ist mathematisch einer gemischten Formulierung äquivalent (MALKUS/HUGHES [80])

und zeichnet sich dadurch aus, dass es einfach in verschiebungsbasierte Finite-Element-Formulierungen implementiert werden kann. Zudem ist es für nichtlineare Problemstellungen geeignet.

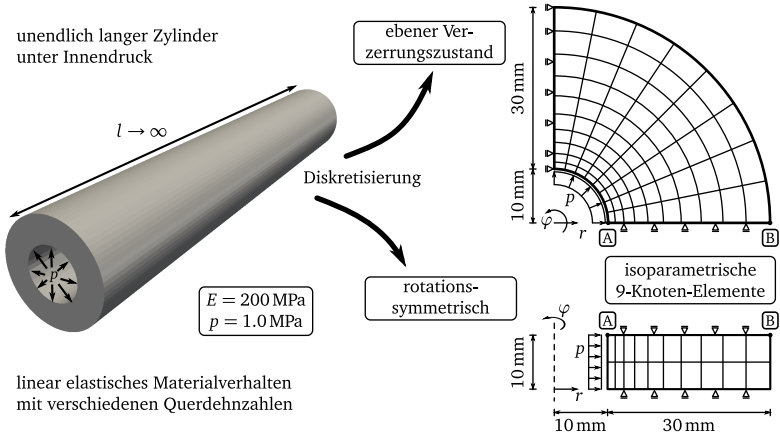
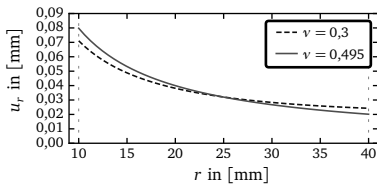


Abbildung 4.2: Patch-Test zur Untersuchung parasitärer Spannungen beim volumetrischen Locking

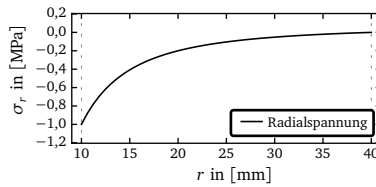
Im Folgenden wird das grundlegende Vorgehen bei der selektiv reduzierten Integration an dem in Abbildung 4.2 dargestellten Beispiel erläutert. Für das Problem eines durch einen gleichmäßigen Innendruck belasteten, dickwandigen Zylinder existieren analytische Lösungen sowohl für elastisches als auch inelastisches Materialverhalten, daher wird diese Problemstellung in der Literatur oft als Patch-Test verwendet. Die analytische Lösung für ideal elastisches Materialverhalten kann u. a. BOWER [15] entnommen werden. Die Lösung für ideal plastisches Materialverhalten ist z. B. in DE SOUZA NETO ET AL. [24] angegeben. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Untersuchungen beschränken sich auf die Betrachtung linear elastischen Materialverhaltens, da die grundlegenden Effekte des volumetrischen Lockings bereits im linearen Fall auftreten.

Für ideal elastisches Materialverhalten folgt die radiale Verschiebung in Abhängigkeit vom Radius, der gegebenen Geometrie sowie den Materialparametern Elastizitätsmodul und Querdehnzahl zu

$$u_r(r) = \frac{p}{E} \frac{(1+\nu) r_i^2 r_a^2}{(r_a^2 - r_i^2)} \left(\frac{1}{r} + (1-2\nu) \frac{r}{r_a^2} \right). \quad (4.16)$$



4.3.1: radiale Verschiebung u_r



4.3.2: Radialspannung σ_r

Abbildung 4.3: Analytische Lösungen für einen mit Innendruck belasteten, dickwandigen Hohlzylinder

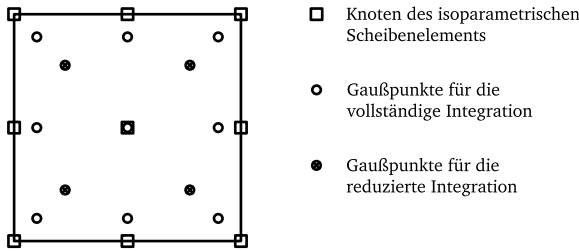


Abbildung 4.4: Lage der Gaußpunkte für die vollständige und reduzierte Integration beim Scheibenelement mit quadratischen Ansatzfunktionen

Die Spannungen in radialer Richtung

$$\sigma_r(r) = p \frac{r_i^2}{(r_a^2 - r_i^2)} \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) \quad (4.17)$$

sind aufgrund der statisch bestimmten Lagerung von den Materialparametern unabhängig. Für die im weiteren Verlauf näher untersuchten Querdehnzahlen sind die Verläufe der Verschiebung und der Radialspannung in Abbildung 4.3 dargestellt.

Im Rahmen der verwendeten Finite-Element-Formulierung müssen die Gleichungen für die Elementsteifigkeit und den Vektor der inneren Kräfte über das Elementgebiet integriert werden. Für die eingesetzten isoparametrischen 9-Knoten-Elemente erfolgt die Integration numerisch nach der Methode von Gauß mit drei Stützstellen je Raumrichtung, vgl. hierzu Abschnitt 4.1.

Die grundlegende Idee der selektiv reduzierten Integration ist die Integration der für das volumetrische Locking verantwortlichen parasitären volumetrischen Anteile mit einer reduzierten Anzahl von Stützstellen. Anschaulich bedeutet dies, dass die entsprechend der Ansatzordnung quadratischen Anteile durch einen linearen Verlauf

approximiert werden. Für das verwendete isoparametrische 9-Knoten-Element sind die Lage der Gaußpunkte, welche für eine vollständige Integration notwendig sind, sowie der Gaußpunkte der reduzierten Integration in Abbildung 4.4 dargestellt.

Die Aufteilung der zur Auswertung der inneren Arbeiten (4.4) benötigten Größen in ihre deviatorischen und volumetrischen Anteile erfolgt mit Hilfe der im Anhang A.1 angegebenen Operatoren,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbb{V} : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.18)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{D} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbb{V} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (4.19)$$

Unter Verwendung der im Anhang gegebenen Eigenschaften der Operatoren folgt die in deviatorische und volumetrische Anteile aufgeteilte innere Arbeit zu

$$A_{int} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{V} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV . \quad (4.20)$$

Die Linearisierung der inneren Arbeit erfolgt unabhängig von der Aufteilung in Richtung der wahren Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$. Daher ergibt sich die linearisierte Form der inneren Arbeit zu

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} dV = \int_V \mathbb{D} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} dV + \int_V \mathbb{V} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} dV . \quad (4.21)$$

Die tensoriellen Operatoren \mathbb{D} und \mathbb{V} können mit der Voigt-Schreibweise (vgl. Abschnitt 4.1) in Matrixform überführt werden. Damit folgt die Elementsteifigkeitsmatrix zu

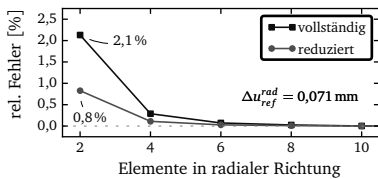
$$K_e = K_e^{\mathbb{D}} + K_e^{\mathbb{V}} = \int_e (\mathbf{DB})^T \mathbf{CB} dV_e + \int_e (\mathbf{VB})^T \mathbf{CB} dV_e . \quad (4.22)$$

Der Vektor der inneren Kräfte kann ebenfalls in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil aufgeteilt werden und ergibt somit sich zu

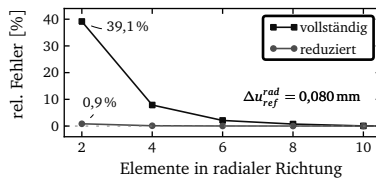
$$\mathbf{i}_e = \mathbf{i}_e^{\mathbb{D}} + \mathbf{i}_e^{\mathbb{V}} = \int_e (\mathbf{DB})^T \underline{\sigma} dV_e + \int_e (\mathbf{VB})^T \underline{\sigma} dV_e . \quad (4.23)$$

Die Auswertung der Anteile $K_e^{\mathbb{D}}$ und $\mathbf{i}_e^{\mathbb{D}}$ erfolgt für das isoparametrische 9-Knoten-Element anhand einer vollständigen Integration mit drei Gaußpunkten je Richtung. Die Integration der volumetrischen Anteile $K_e^{\mathbb{V}}$ und $\mathbf{i}_e^{\mathbb{V}}$ erfolgt reduziert mit zwei Gaußpunkten je Richtung. Die benötigten Größen müssen hierfür an zusätzlichen Punkten im Element bestimmt werden, wodurch der numerische Aufwand steigt.

Der Einfluss der reduzierten Integration auf die Güte der Verschiebungsapproximation kann der Abbildung 4.5 entnommen werden, die den Approximationsfehler der Verschiebung des Punktes $\underline{\mathbf{A}}$ entsprechend der Abbildung 4.2 für verschiedene



4.5.1: Querdehnzahl $\nu = 0,3$



4.5.2: Querdehnzahl $\nu = 0,495$

Abbildung 4.5: Vergleich des Approximationsfehlers bei vollständiger und reduzierter Integration für linear elastisches Materialverhalten

Diskretisierungen darstellt. Die Berechnung erfolgt sowohl für den ebenen Verzerungszustand als auch für den rotationssymmetrischen Zustand. Es zeigt sich, dass die Verschiebungsergebnisse für beide Zustände übereinstimmen, daher wird im Folgenden lediglich der rotationssymmetrische Zustand betrachtet.

Für die in Abbildung 4.5.1 dargestellten Simulationsergebnisse bei einer Querdehnzahl von $\nu = 0,3$ zeigt sich, dass die berechneten Verschiebungen sowohl für eine Berechnung mit der vollständigen als auch mit der reduzierten Integration bereits bei einer Diskretisierung mit 4 Elementen in radialer Richtung hinreichend genau wiedergegeben werden. Bei der sehr groben Diskretisierung mit 2 Elementen in Ringrichtung kann mit der reduzierten Integration der Approximationsfehler mehr als halbiert werden.

Die Ergebnisse von Simulationen für den nahezu inkompressiblen Fall mit einer Querdehnzahl von $\nu = 0,495$ sind in Abbildung 4.5.2 zusammengefasst. Hier zeigt sich deutlich das Auftreten von volumetrischen Lockingeffekten bei der Verwendung des vollständigen Integrationsschemas, welche insbesondere für grobe Diskretisierungen zu erheblichen Approximationsfehlern führen. Die reduzierte Integration kann volumetrisches Locking effektiv vermeiden, der Approximationsfehler ist für alle Diskretisierungen deutlich geringer.

Die reduzierte Integration stellt eine wirksame Methode zur Vermeidung von volumetrischem Locking dar. Der Nachteil eines höheren numerischen Aufwands am Element wird durch die Möglichkeit, wesentlich größere Diskretisierungen verwenden zu können, kompensiert.

Während die Verschiebungen nahezu inkompressibler elastischer Materialien bei der Verwendung der reduzierten Integration hinreichend genau wiedergegeben werden können, ist die für praxisrelevante Fragestellungen oft wichtigere Spannungslösung von starken Oszillationen geprägt. Wie der Abbildung 4.6 entnommen werden kann, weichen die Spannungen an den Gaußpunkten deutlich von der analytischen Lösung ab. Für rein elastische Materialien können die Oszillationen über einen Mittelungsprozess in der Nachlaufrechnung eliminiert werden. Für die Beschreibung

nichtlinearen Materialverhaltens gehen die Spannungen an den Gaußpunkten direkt in die Berechnung der Tangentialmatrix und des Residuumsvektors ein, womit stark oszillierende Spannungen das Lösungsverhalten negativ beeinflussen können.

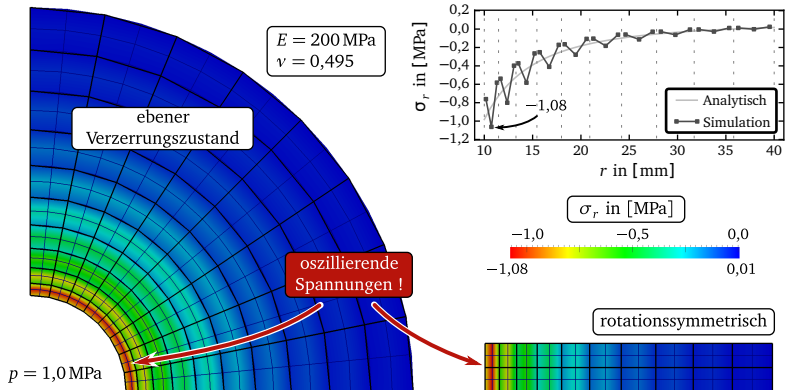


Abbildung 4.6: Oszillierende Spannungen trotz reduzierter Integration

Die Ursache der Spannungsoszillationen sind analog zum volumetrischen Locking parasitäre volumetrische Dehnungsanteile. Bei der reduzierten Integration werden diese Anteile anschaulich mit einer geringeren Ansatzordnung behandelt, so dass bei quadratischen Verschiebungsansätzen die volumetrischen Anteile lediglich einen bilinearen Verlauf annehmen können.

Dieser Ansatz wird auf die Berechnung modifizierter Dehnungen, welche anstelle der wahren Dehnungen zur Spannungsberechnung verwendet werden, übertragen. Hierfür werden zunächst die wahren Dehnungen sowohl an den Gaußpunkten der vollständigen als auch der reduzierten Integration bestimmt. Die volumetrischen Deh-

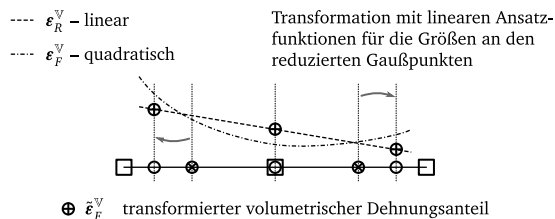
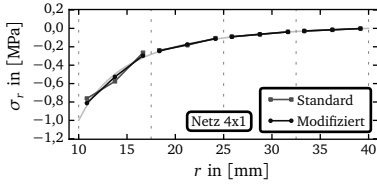
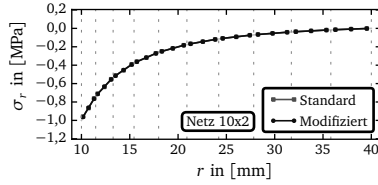


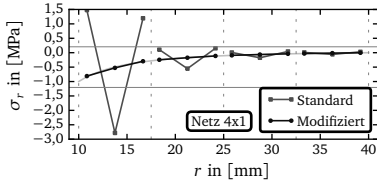
Abbildung 4.7: Elimination der parasitären volumetrischen Verzerrungsanteile



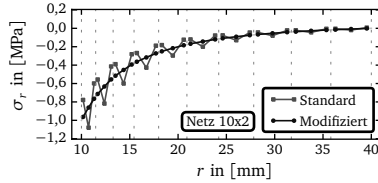
4.8.1: Querdehnzahl $\nu = 0,3$ – grobes Netz



4.8.2: Querdehnzahl $\nu = 0,3$ – feines Netz



4.8.3: Querdehnzahl $\nu = 0,495$ – grobes Netz



4.8.4: Querdehnzahl $\nu = 0,495$ – feines Netz

Abbildung 4.8: Vergleich der Radialspannungen für Simulationen mit der Standardmethode der reduzierten Integration und der modifizierten Variante für verschiedene Diskretisierungen und Querdehnzahlen ν

nungen ϵ_R^\vee an den reduzierten Gaußpunkten werden dann auf die Gaußpunkte der vollständigen Integration transformiert. Hierbei werden Ansätze für die Gaußpunktgrößen verwendet, welche um eine Ordnung niedriger sind als die Ansatzordnung der Verschiebungen, vgl. Abbildung 4.7.

An den Gaußpunkten der vollständigen Integration werden nun die parasitären volumetrischen Dehnungsanteile ϵ_F^\vee eliminiert und durch die transformierten Dehnungsanteile $\tilde{\epsilon}_F^\vee$ ersetzt, so dass die modifizierten Dehnungen $\tilde{\epsilon}_F$ zu

$$\tilde{\epsilon}_F = \epsilon_F^D - \epsilon_F^\vee + \tilde{\epsilon}_F^\vee \quad (4.24)$$

folgen.

Es zeigt sich, dass die Verwendung der modifizierten Dehnungen zu deutlich glatteren Spannungsverläufen führt, was sich insbesondere bei nichtlinearem Materialverhalten (vgl. Abschnitt 5.4 und Abschnitt 8.1.2) positiv auf die numerische Stabilität auswirkt.

Abbildung 4.8 stellt die berechneten Spannungsverläufe beider Verfahren gegenüber. Für kompressibles Materialverhalten mit einer Querdehnzahl von $\nu = 0,3$ zeigen sich keine signifikanten Unterschiede in den berechneten Spannungen. Für das feine Netz approximieren beide Verfahren die analytische Spannungslösung exakt. Bei der groben Diskretisierung kann das modifizierte Verfahren die Spannungen geringfügig besser wiedergeben.

Bei nahezu inkompressiblem Materialverhalten ($\nu = 0,495$) zeigen sich die Vorteile des modifizierten Verfahrens. Während die Spannungslösungen mit dem Standardverfahren gerade für die grobe Diskretisierung extreme Abweichungen zeigen, werden die Spannungen mit der modifizierten Methode sehr gut wiedergegeben.

4.3 Integration der Werkstoffgleichungen

Die Materialgleichungen stellen sowohl für das Verbundmodell als auch für die Materialmodelle der Einzelkomponenten ein nichtlineares Anfangswertproblem auf der Materialpunktebene dar. Eine geschlossene analytische Lösung kann für derartige Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen in der Regel nicht angegeben werden. Der folgende Abschnitt stellt ein Schema vor, mit dem die numerische Lösung der nichtlinearen Gleichungen für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung effizient möglich ist. Darüber hinaus kann mit Hilfe dieses numerischen Schemas auch die Tangentenmatrix konsistent bestimmt werden.

4.3.1 Kollokation

Nichtlineare Differentialgleichungen in der Zeit können mit Hilfe numerischer Zeitintegrationsverfahren in algebraische Gleichungen überführt werden. Ein gleichermaßen effektives und einfach anzuwendendes Zeitintegrationsverfahren stellt das von DINKLER/SCHWESIG [30] vorgestellte Kollokationsverfahren dar, welches im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt wird.

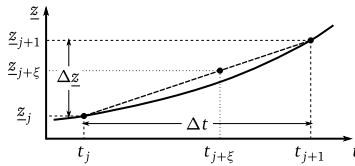


Abbildung 4.9: Approximation des Verlaufs von Zustandsgrößen im Zeitintervall Δt beim Kollokationsverfahren

Fasst man die unbekannten Größen der Spannungs-Dehnungs-Beziehung zum Vektor der Zustandsgrößen

$$\underline{z} = (\underline{\sigma}, \underline{q}, \underline{\epsilon})^T \quad (4.25)$$

zusammen, können die unbekannten inkrementellen Zuwächse dieser vektoriellen Zustandsgröße im Zeitschritt $\Delta t_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ über

$$\underline{z}_{j+1} = \underline{z}_j + \Delta \underline{z}_{j+1} \quad (4.26)$$

definiert werden. Beim Kollokationsverfahren wird der Verlauf der Zustandsgrößen in der Zeit entsprechend Abbildung 4.9 linear im Zeitintervall Δt approximiert. Mit Hilfe des linearen Ansatzes in der Zeit erhält man die Größen $\underline{z}_{j+\xi}$ an der Kollokationsstelle $\xi \in [0, 1]$ über

$$\xi = \frac{t_{j+\xi} - t_j}{\Delta t_{j+1}} \quad (4.27)$$

zu

$$\begin{aligned} \underline{z}_{j+\xi} &= (1 - \xi) \cdot \underline{z}_j + \xi \cdot \underline{z}_{j+1} \\ &= \underline{z}_j + \xi \cdot \Delta \underline{z}_{j+1} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Damit kann die Zeitableitung an der Stelle ξ

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}_{j+\xi} &= \frac{d\underline{z}_{j+\xi}}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt_{j+\xi}} \\ &= \frac{1}{\Delta t_{j+1}} \left(\underline{z}_{j+1} - \underline{z}_j \right) = \frac{\Delta \underline{z}_{j+1}}{\Delta t_{j+1}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

approximiert werden. Das Kollokationsverfahren entspricht bei einer Auswertung der differentiellen Gleichungen an der Stelle $\xi = 0$ dem expliziten Euler-Vorwärts-Verfahren, welches jedoch nur bedingt stabil ist. Für Werte $0 < \xi \leq 1$ entspricht das Kollokationsverfahren einem impliziten Zeitintegrationsverfahren. Für Werte $0,5 \leq \xi \leq 1$ sind derartige implizite Zeitintegrationsverfahren bei degressiven Verlauf unbedingt stabil. Das Kollokationsverfahren beinhaltet in natürlicher Weise für $\xi = 0,5$ die Mittelpunktsregel und das voll-implizite Euler-Rückwärts-Verfahren bei $\xi = 1$.

Die Anwendung des Kollokationsverfahrens auf das nichtlineare Differentialgleichungssystem am Materialpunkt führt zu einem System nichtlinearer algebraischer Gleichungen für die Zuwächse

$$\Delta \underline{z} = \left(\Delta \underline{\sigma}, \Delta \underline{q}, \Delta \underline{\epsilon} \right)^T \quad (4.30)$$

im betrachteten Zeitintervall. Die Lösung der algebraischen nichtlinearen Gleichungen kann mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens erfolgen, welches im folgenden Abschnitt dargestellt wird.

4.3.2 Newton-Raphson-Verfahren

Mit Hilfe des Kollokationsverfahrens können die nichtlinearen Differentialgleichungen des Anfangswertproblems in ein System algebraischer Gleichungen überführt

werden. Diese Gleichungen sind für kontinuumsmechanisch begründete Materialmodelle in der Regel nichtlinear, womit eine analytische Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems im Allgemeinen nicht möglich ist. Ein effizientes und robustes Verfahren zur Lösung nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme stellt das Newton-Raphson-Verfahren dar, welches bereits auf globaler Ebene bei der Linearisierung der Arbeitsgleichung zum Einsatz kommt.

Die Berechnung der Spannungen $\underline{\sigma}$ beruht auf den konstitutiven Gleichungen für die Spannungen und den Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen q . Sowohl die Spannungen als auch die inneren Größen hängen nichtlinear vom Vektor \underline{z} der Zustandsgrößen und der Zeit t ab. Somit gilt für das Residuum der konstitutiven Gleichung $\underline{R}_{\underline{\sigma}}$ und das Residuum der inneren Größen \underline{R}_q

$$\underline{R}_{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} - \underline{f}(\underline{z}) \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad (4.31)$$

$$\underline{R}_q = \underline{q} - \underline{g}(\underline{z}) \stackrel{!}{=} \underline{0}. \quad (4.32)$$

Mit Hilfe des Kollokationsverfahrens wird dieses System nichtlinearer Differentialgleichungen in eine algebraische Form überführt, bei der die inkrementellen Zuwächse $\Delta \underline{z}_{j+1}$ zum Ende des Zeitschritts Δt_{j+1} die unbekannten Größen darstellen

$$\underline{R}_{\Delta \underline{\sigma}_{j+1}} = \underline{\sigma}_j + \xi \cdot \Delta \underline{\sigma}_{j+1} - \underline{f}(\underline{z}_j, \Delta \underline{z}_{j+1}, \Delta t_{j+1}, \xi) \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad (4.33)$$

$$\underline{R}_{\Delta q_{j+1}} = \underline{q}_j + \xi \cdot \Delta \underline{q}_{j+1} - \underline{g}(\underline{z}_j, \Delta \underline{z}_{j+1}, \Delta t_{j+1}, \xi) \stackrel{!}{=} \underline{0}. \quad (4.34)$$

Das System der nichtlinearen Gleichungen hängt neben den unbekannten inkrementellen Zuwächsen $\Delta \underline{z}_{j+1}$ vom bekannten Vektor der Zustandsgrößen zum Ende des vorherigen Zeitschritts \underline{z}_j , der Größe des Zeitschritts Δt_{j+1} und der Kollokationsstelle ξ ab. Im weiteren Verlauf wird im Sinne einer besseren Lesbarkeit auf den Fußzeiger $j + 1$ für die Zuwächse verzichtet.

Eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems kann iterativ mit dem Newton-Raphson-Verfahren mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{R}_{\Delta \underline{\sigma}}^k}{\partial \Delta \underline{\sigma}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta \underline{\sigma}}^k}{\partial \Delta \underline{q}} \\ \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^k}{\partial \Delta \underline{\sigma}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^k}{\partial \Delta \underline{q}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \Delta \underline{\sigma}^{k+1} \\ d \Delta \underline{q}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{R}_{\Delta \underline{\sigma}}^k \\ -\underline{R}_{\Delta q}^k \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

für die inkrementellen Zuwächse $d \Delta \underline{\sigma}^{k+1}$ und $d \Delta \underline{q}^{k+1}$ im Iterationsschritt $k + 1$ bestimmt werden.

Hierbei werden die rechte sowie die linke Seite des Gleichungssystems an der Stelle k ausgewertet und der inkrementelle Zuwachs über die Lösung des linearen

Gleichungssystems bestimmt. Die aktuellen Größen ergeben sich aus der Summe der Einzelinkremente,

$$\Delta \sigma^{k+1} = \Delta \underline{\sigma}^k + d \Delta \underline{\sigma}^{k+1} \quad \underline{\sigma}^{k+1} = \underline{\sigma}_j + \Delta \underline{\sigma}^{k+1} \quad (4.36)$$

$$\Delta \underline{q}^{k+1} = \Delta \underline{q}^k + d \Delta \underline{q}^{k+1} \quad \underline{q}^{k+1} = \underline{q}_j + \Delta \underline{q}^{k+1} . \quad (4.37)$$

Der iterative Prozess wird solange durchgeführt, bis die inkrementellen Zuwächse eine festgelegte Toleranz unterschritten haben, bei der sich keine weiteren Änderungen einstellen.

Erweitertes Gleichungssystem zur Steuerung der Eingangsparameter

Das vorgestellte Schema zur Lösung des Anfangswertproblems auf der Werkstoffebene kann in gleicher Art und Weise zur Identifikation von Modellparametern anhand experimenteller Untersuchungen herangezogen werden. Das lineare Gleichungssystem (4.35) ist jedoch nur für den Einsatz in Finite-Element-Berechnungen geeignet, bei denen die unbekannten Zuwächse allein aus den Dehnungszuwächsen und den Zustandsgrößen des letzten Zeitschritts bestimmt werden können. Im Rahmen einer Parameteridentifikation ist es in der Regel unzureichend, wenn die Spannungsantwort allein in Folge einer vorgegebenen Dehnung bestimmt werden kann. Vielmehr ergibt sich infolge des Beanspruchungszustands im Experiment ein Vektor von Eingangswerten, bei dem auch bestimmte Spannungskomponenten vorgegeben sein können. Die den jeweiligen Spannungskomponenten zugeordneten Dehnungskomponenten stellen dann die Unbekannten des Systems dar.

Am Beispiel eines weggesteuerten einaxialen Versuchs mit einer vorgegebenen Dehnung $\hat{\varepsilon}(t)$ in x-Richtung lässt sich verdeutlichen, warum das Gleichungssystem (4.35) erweitert werden muss. Der Vektor der Eingangswerte ist mit

$$\varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}(t) \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (4.38)$$

gegeben. Somit stellen die Komponenten

$$\sigma_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{xy} \quad (4.39)$$

neben den inneren Größen \underline{q} die unbekannten Größen auf der Werkstoffebene dar. Eine Bestimmung unbekannter Dehnungen bei gegebener Spannung ist jedoch mit dem Gleichungssystem (4.35) ohne Erweiterung nicht möglich.

Mit Hilfe eines zusätzlichen Residuums für die vorgegebenen Größen

$$R_{\Delta \underline{v}} = \Delta \underline{v} - \Delta \underline{\hat{v}} \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad \text{mit} \quad \Delta v_i = \Delta \sigma_i \vee \Delta \varepsilon_i \quad \text{und} \quad \Delta \hat{v}_i = \Delta \hat{\sigma}_i \vee \Delta \hat{\varepsilon}_i, \quad (4.40)$$

dessen Komponenten die Differenzen aus den unbekannten Zuwächsen und den entsprechenden vorgegebenen Größen bilden, kann das Gleichungssystem (4.35)

erweitert werden. Hierbei stellt der Operator \vee eine „Entweder-Oder“-Operation dar, bei der für die einzelnen Komponenten jeweils die vorgegebene Spannung oder Dehnung anzusetzen ist. Mit den Dehnungszuwächsen als zusätzliche Unbekannte erhält man ein erweitertes System linearer Gleichungen für das Newton-Raphson-Verfahren

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\Delta\sigma}^k}{\partial \Delta\sigma} & \frac{\partial R_{\Delta\sigma}^k}{\partial \Delta q} & \frac{\partial R_{\Delta\sigma}^k}{\partial \Delta\varepsilon} \\ \frac{\partial R_{\Delta q}^k}{\partial \Delta\sigma} & \frac{\partial R_{\Delta q}^k}{\partial \Delta q} & \frac{\partial R_{\Delta q}^k}{\partial \Delta\varepsilon} \\ \frac{\partial R_{\Delta v}^k}{\partial \Delta\sigma} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{\Delta v}^k}{\partial \Delta\varepsilon} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\Delta\sigma^{k+1} \\ d\Delta q^{k+1} \\ d\Delta\varepsilon^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{\Delta\sigma}^k \\ -R_{\Delta q}^k \\ -R_{\Delta v}^k \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Mit diesem System kann die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung für einen beliebigen Vektor vorgegebener Spannungs- oder Dehnungskomponenten iterativ ermittelt werden. Der Vektor der Unbekannten des erweiterten Systems entspricht hierbei dem Vektor der inkrementellen Zuwächse der Zustandsgrößen

$$d\Delta\mathbf{z}^{k+1} = \left(d\Delta\sigma^{k+1}, d\Delta q^{k+1}, d\Delta\varepsilon^{k+1} \right)^T. \quad (4.42)$$

Für das Beispiel eines einaxialen Versuchs mit einer Wegsteuerung und Eingangsgrößen entsprechend der Gleichung (4.38) folgen die Vektoren des zusätzlichen Residuums zu

$$\underline{v} = \left(\varepsilon_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy} \right)^T \quad (4.43)$$

$$\underline{\hat{v}} = (\hat{\varepsilon}, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \quad (4.44)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems auf der Werkstoffebene mit dem Newton-Raphson-Verfahren bedingt die Bestimmung der Ableitung der Residuen nach den Größen des Vektors $\Delta\mathbf{z}$. Im folgenden Abschnitt wird das Verfahren der algorithmischen Differentiation vorgestellt, mit dem die benötigten Ableitungen numerisch effizient bestimmt werden können.

4.3.3 Algorithmische Differentiation

Die für die Tangentialmatrix

$$J = \left[\frac{\partial \underline{R}^k}{\partial \underline{\Delta z}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^k}{\partial \underline{\Delta\sigma}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^k}{\partial \underline{\Delta q}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^k}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \\ \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^k}{\partial \underline{\Delta\sigma}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^k}{\partial \underline{\Delta q}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^k}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \\ \frac{\partial \underline{R}_{\Delta v}^k}{\partial \underline{\Delta\sigma}} & \mathbf{0} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta v}^k}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

des Newton-Raphson-Verfahrens benötigten Ableitungen der Residuen nach den Komponenten des Vektors der unbekannten Zuwächse $\underline{\Delta z}$ können für die meisten nichtlinearen Materialmodelle analytisch bestimmt werden. Für hochgradig nichtlineare Materialmodelle, wie z. B. für das hypoplastische Materialmodell der Mineralstoffkomponente, ist eine analytische Auswertung nur mit einem erheblichen Aufwand möglich.

Sind die benötigten Ableitungen nicht mit vertretbarem Aufwand zu ermitteln, kann die Bestimmung der Einträge der Tangentialmatrix numerisch erfolgen. Die Differentiation erfolgt dann in der Regel mit Hilfe des Differenzenverfahrens, bei dem die Einträge der Spalte i der Tangentialmatrix J mit Hilfe des Differenzenausdrucks

$$\left[\frac{\partial \underline{R}^k}{\partial \underline{\Delta z}} \right]_i \approx \frac{\underline{R}^k(\underline{\Delta z} + \underline{\delta}^i \cdot \varepsilon) - \underline{R}^k}{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad [\underline{\delta}^i]_j = \delta_{ij} \quad (4.46)$$

approximiert werden. Der Aufwand der numerischen Differentiation ist maßgeblich größer als eine analytische Auswertung der Tangentialmatrix, da die rechte Seite \underline{R}^k für jeden Eintrag des Vektors $\underline{\Delta z}$ neu bestimmt werden muss. Zudem stellt eine mit der numerischen Differentiation bestimmte Tangentialmatrix lediglich eine Approximation dar, deren Güte insbesondere von der Wahl einer geeigneten „Störgröße“ ε abhängt.

Eine numerisch effiziente Alternative zur Bestimmung von Ableitungen mit Hilfe des Differenzenverfahrens stellt die algorithmische Differentiation dar. Dieses auch als automatische Differentiation bezeichnete Verfahren ermöglicht es, die Ableitungen von Funktionen beliebiger Komplexität numerisch bestimmen zu können. Die mathematischen Hintergründe und die numerische Umsetzung der algorithmischen Differentiation sind ausführlich in GRIEWANK/WALTHER [40] dargestellt.

Die Grundlage der algorithmischen Differentiation ist die algorithmische Beschreibung von Funktionen, welche sich bei der Implementierung dieser Funktionen in Computerprogramme ergibt. In der algorithmischen Beschreibung liegen die funktionalen Zusammenhänge, egal welcher Komplexität, als Kette elementarer

Grundfunktionen wie z.B. `exp()` oder `sqrt()` vor, deren Ableitungen bekannt sind.

Daher kann die Ableitung der gesamten Funktion in algorithmischer Form mit Hilfe der Kettenregel bestimmt werden. Hierbei wird die Kettenregel jedoch nicht auf die symbolische Darstellung der Grundfunktionen angewendet, sondern auf aktuelle numerische Werte, wie im folgenden Beispiel erläutert wird.

Zur Veranschaulichung der grundlegenden Methodik der algorithmischen Differentiation wird die Ableitung der Funktion

$$f(x_1, x_2) = \sin[(x_1 x_2)^2] \quad (4.47)$$

nach der Variablen x_1 für die Eingangswerte $x_1 = 1,5$ und $x_2 = 0,5$ mit der algorithmischen Differentiation bestimmt. Die algorithmische Differentiation unterscheidet bei der Bestimmung der Ableitung zwischen dem Vorwärts- und dem Rückwärtsmodus. Für dieses Beispiel wird der anschaulichere Vorwärtsmodus gewählt.

Die Gleichung (4.47) kann in den in Abbildung 4.10 dargestellten Graphen überführt werden, aus dem der schematische Ablauf des Algorithmus zur Bestimmung des Funktionswerts besonders deutlich wird.

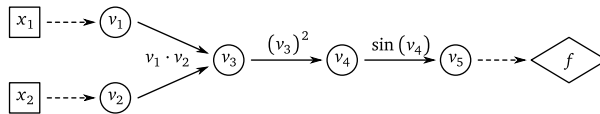


Abbildung 4.10: Graphendarstellung der Funktion $f(x_1, x_2)$

In Tabelle 4.1 sind die wesentlichen Schritte für die Funktionsauswertung und die Bestimmung der Ableitung für die gegebenen Eingangswerte zusammengefasst. Die Funktionsauswertung (Tabelle 4.1.1) muss im Rahmen eines Newton-Raphson-Algorithmus in jedem Fall ausgeführt werden, da mit dieser das Residuum bestimmt wird. Somit ist mit der Funktionsauswertung kein zusätzlicher numerischer Aufwand verbunden.

Tabelle 4.1.2 fasst die Schritte zur numerischen Auswertung der Ableitung nach der Vorwärtsmethode zusammen. Auf Basis der Graphendarstellung erfolgt eine schrittweise Auswertung, bei der die Zwischenwerte über bekannte Funktionswerte und vorherige Zwischenwerte sowie die bekannten Ableitungsvorschriften der Grundoperationen berechnet werden.

Im Gegensatz zur symbolischen Differentiation erhält man somit keine funktionale Vorschrift zur Berechnung der Ableitung. Das Ergebnis einer algorithmischen Differentiation ist vielmehr der numerische Wert der Ableitung für einen bestimmten

4.1.1: Funktionsauswertung

v_1	=	x_1	=	1,5
v_2	=	x_2	=	0,5
v_3	=	$v_1 \cdot v_2$	=	0,75
v_4	=	$(v_3)^2$	=	0,5625
v_5	=	$\sin(v_4)$	=	0,5333
f	=	v_5	=	0,5333

4.1.2: Ableitungsauswertung $\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\cdot)$

\dot{v}_1	$=$	$\frac{\partial x_1}{\partial x_1}$	$=$	1,0		
\dot{v}_2	$=$	$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$	$=$	0,0		
\dot{v}_3	$=$	$\frac{\partial v_3}{\partial v_1} \cdot \dot{v}_1 + \frac{\partial v_3}{\partial v_2} \cdot \dot{v}_2$	$=$	$v_2 \cdot \dot{v}_1$	$=$	0,5
\dot{v}_4	$=$	$\frac{\partial v_4}{\partial v_3} \cdot \dot{v}_3$	$=$	$2 \cdot v_3 \cdot \dot{v}_3$	$=$	0,75
\dot{v}_5	$=$	$\frac{\partial v_5}{\partial v_4} \cdot \dot{v}_4$	$=$	$\cos(v_4) \cdot \dot{v}_4$	$=$	0,6344
\dot{f}	$=$	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$=$	0,6344		

Tabelle 4.1: Schematischer Ablauf der algorithmischen Differentiation im Vorwärtsmodus

Satz von Eingangsgrößen. Im Gegensatz zur numerischen Differentiation, mit der lediglich Approximationen der Ableitung ermittelt werden können, ist die algorithmische Differentiation im Rahmen der Maschinengenauigkeit exakt. Dies stellt für hochgradig nichtlineare Problemstellungen einen entscheidenden Vorteil dar.

Der numerische Aufwand zur Bestimmung von Ableitungen mit der algorithmischen Differentiation ist in der Regel etwas höher als bei einer numerischen Umsetzung einer analytisch ermittelten Ableitungsvorschrift. Untersuchungen an den im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Materialmodellen zeigen einen um 1,5- bis 2-fach höheren Aufwand, der somit deutlich geringer ist als der numerische Aufwand für eine Berechnung der Tangentialmatrix mit Hilfe des Differenzenverfahrens.

Der wesentliche Vorteil der algorithmischen Differentiation ist neben der hohen numerischen Effizienz die Möglichkeit, die Materialgleichungen verändern zu können, ohne den aufwändigen Prozess der Linearisierung neu durchführen zu müssen. Zudem kann die erhöhte Genauigkeit bei der Bestimmung der Tangentialmatrix zu einer erhöhten Konvergenzrate des Newton-Raphson-Verfahrens führen. Somit stellt die algorithmische Differentiation ein effizientes Werkzeug dar, mit dem der Prozeß der Entwicklung und Erweiterung von Materialmodellen beschleunigt werden kann.

Für die algorithmische Differentiation existieren zahlreiche numerische Bibliotheken,

welche nicht nur für die Hochsprachen C oder Fortran, sondern auch für Skriptsprachen wie Python oder Matlab zur Verfügung stehen. Im Rahmen dieser Arbeit kommt die Bibliothek ADOL-C zum Einsatz, deren Funktionsumfang ausführlich in WALTHER [111] beschrieben ist.

4.3.4 Gedämpftes Newton-Raphson-Verfahren

Mit Hilfe der algorithmischen Differentiation kann die Tangentialmatrix J effizient und im Rahmen der Maschinengenauigkeit exakt bestimmt werden. Die Konvergenzrate des Newton-Raphson-Verfahrens ist jedoch nicht nur von der Güte der Tangentialmatrix abhängig, sondern insbesondere von der Wahl eines geeigneten Startwerts für die Iteration. Dies kann dadurch begründet werden, dass das iterative Lösungsverfahren lediglich in der Nähe der Lösung eine quadratische Konvergenzrate aufweist. Beim Einsatz des Newton-Raphson-Verfahrens im Rahmen der Finite-Element-Methode sowie bei der Lösung nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen kann eine Schätzung der Lösung im Allgemeinen nicht erfolgen. Der initiale Schätzwert ist in der Regel durch den letzten bekannten Lösungsvektor gegeben. Bei der Wahl eines hinreichend kleinen Last- bzw. Zeitschritts kann dann sichergestellt werden, dass das Newton-Raphson-Verfahren auch für hochgradig nichtlineare Problemstellungen konvergiert.

Das lokale Konvergenzverhalten des Newton-Raphson-Verfahrens kann mit Hilfe zahlreicher Verfahren wie z. B. gedämpften Newton-Raphson-Verfahren oder Levenberg-Marquardt-Methoden auf ein globales Konvergenzverhalten erweitert werden. Obwohl diese Erweiterungen einen zusätzlichen numerischen Aufwand darstellen, kann durch den vergrößerten Konvergenzradius oft mit wesentlich größeren Zeit- und Lastschritten gearbeitet und somit der globale Aufwand deutlich verringert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die von NOWAK/WEIMANN [86] auf Grundlage der Arbeit von DEUFLHARD [25] entwickelte Form des gedämpften Newton-Raphson-Verfahrens eingesetzt. Das gewählte Verfahren stellt eine besonders effiziente Erweiterung dar, welche sich durch sehr gute globale Konvergenz bei einer gleichzeitig einfach zu implementierenden Struktur auszeichnet.

Der zugrundeliegende Algorithmus ist in Abbildung 4.11 zusammengefasst. Eine Untersuchung der Konvergenzeigenschaften erfolgt im Abschnitt 6.4. Es zeigt sich, dass mit Hilfe des gedämpften Newton-Raphson-Verfahrens der Konvergenzradius deutlich erhöht werden kann und somit die hochgradig nichtlinearen Gleichungen der Materialmodelle und insbesondere des Verbundmodells effizient gelöst werden können.

Bestimme $\underline{R}_0 = \underline{R}(\underline{x}_0)$ und $\underline{J}_0 = \underline{J}(\underline{x}_0)$; setze $k = 0$	
Setze Einträge des initialen Gewichtsvektors $w_0^i = \max\{ x_0^i , tol\}$	
Setze $\lambda_0 = 10^{-4}$ und $\lambda_{\min} = 10^{-8}$ sowie $\kappa = 1$ (<i>restricted update</i>)	
Verwende die <i>weighted root mean square</i> -Norm $\ \underline{v}\ _w = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{v^i}{w^i}\right)^2}$	
Solange keine Konvergenz und $k < \text{Anzahl maximaler Iterationen}$	
Bestimme $\Delta \underline{x}_k$ mit $\underline{J}_k \cdot \Delta \underline{x}_k = -\underline{R}_k$	
Ist $k > 0$?	
Ja	Nein
$\lambda_k = \min\left\{\frac{1}{h_k}; 1\right\}$ mit $h_k = \frac{\ \Delta \tilde{\underline{x}}_k - \Delta \underline{x}_k\ _w \cdot \ \Delta \underline{x}_k\ _w}{\ \Delta \underline{x}_{k-1}\ _w \cdot \ \Delta \tilde{\underline{x}}_k\ _w} \lambda_{k-1}$	Setze $\lambda_k = \lambda_0$
$\lambda/f_b \leq \lambda_k \leq f_b \cdot \lambda$ (<i>bounded update</i> , $f_b = 10$)	
Setze $j = 0$ und $\lambda = \max\{\lambda_k; \lambda_{\min}\}$	
Setze $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda \Delta \underline{x}_k$, bestimme $\underline{R}_{k+1} = \underline{R}(\underline{x}_{k+1})$ Bestimme $\Delta \tilde{\underline{x}}_k$ mit $\underline{J}_k \cdot \Delta \tilde{\underline{x}}_k = -\underline{R}_{k+1}$	
Ist $\lambda = 1$ und $\ \Delta \underline{x}_k\ _w \leq \sqrt{10 \cdot tol}$ und $\ \Delta \tilde{\underline{x}}_{k+1}\ _w \leq tol$?	
Ja	Nein
Konvergenzkriterium erfüllt ! Setze $\underline{x}_{\text{end}} = \underline{x}_{k+1} + \lambda \Delta \tilde{\underline{x}}_{k+1}$ → Beende die Iteration	↓
$\lambda_k = \min\left(\frac{1}{h_k}; 1\right)$ mit $h_k = \frac{\kappa \ \Delta \tilde{\underline{x}}_{k+1} - (1-\lambda) \Delta \underline{x}_k\ _w}{\ \Delta \underline{x}_k\ _w}$	
Ist $\ \Delta \tilde{\underline{x}}_{k+1}\ _w > \ \Delta \underline{x}_k\ _w$?	
Ja	Nein
Ist $\lambda = \lambda_{\min}$?	
Ja	Nein
Keine Konvergenz ! → Abbruch !	↓
Setze $j = j + 1$ sowie $\lambda = \min\left(\lambda_k; \frac{\lambda}{2}\right)$ und $\lambda = \max(\lambda; \lambda_{\max})$	
Solange $\ \Delta \tilde{\underline{x}}_{k+1}\ _w > \ \Delta \underline{x}_k\ _w$	
Aktualisiere den Gewichtsvektor $w_{k+1}^i = \max\{ w_k^i ; \frac{1}{2}(x_k^i + x_{k+1}^i)\}$ Erhöhe $k = k + 1$ und setze $\underline{x}_k = \underline{x}_{k+1}$ und $\Delta \underline{x}_{k-1} = \Delta \underline{x}_k$ Setze $\Delta \underline{x}_k = \Delta \underline{x}_{k+1}$ und $\Delta \tilde{\underline{x}}_k = \Delta \tilde{\underline{x}}_{k+1}$ Setze $\underline{R}_k = \underline{R}_{k+1}$ und bestimme Tangente $\underline{J}_k = \underline{J}_{k+1}$	

Abbildung 4.11: Gedämpftes Newton-Raphson-Verfahren (NOWAK/WEIMANN [86])

4.3.5 Bestimmung der konsistenten Tangente

Die Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens in Finite-Element-Formulierungen ist maßgeblich von einer konsistenten Bestimmung der Tangentialmatrix

$$\underline{C} = \frac{\partial \underline{\Delta\sigma}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \quad (4.48)$$

abhängig. Im Folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem für beliebige Materialmodelle mit inneren Variablen die konsistente Tangente auf Basis der Lösung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung erfolgen kann.

Die Lösung des Anfangswertproblems auf der Werkstoffebene bedingt, dass für den konvergierten Zustand nach i Iterationen die Residuen der Werkstoffgleichungen null ergeben,

$$\underline{R}_{\Delta\sigma}^i = \underline{0} \quad \text{und} \quad \underline{R}_{\Delta q}^i = \underline{0}. \quad (4.49)$$

Bildet man die totale Ableitung der Residuen nach dem Dehnungssinkrement $\underline{\Delta\varepsilon}$ erhält man die Gleichungen

$$\frac{d\underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{d\underline{\Delta\varepsilon}} = \underline{0} = \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \cdot \underline{1} + \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{\partial \underline{\Delta\sigma}} \cdot \frac{\partial \underline{\Delta\sigma}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{\partial \underline{\Delta q}} \cdot \frac{\partial \underline{\Delta q}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \quad (4.50)$$

$$\frac{d\underline{R}_{\Delta q}^i}{d\underline{\Delta\varepsilon}} = \underline{0} = \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^i}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \cdot \underline{1} + \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^i}{\partial \underline{\Delta\sigma}} \cdot \frac{\partial \underline{\Delta\sigma}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} + \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^i}{\partial \underline{\Delta q}} \cdot \frac{\partial \underline{\Delta q}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}}. \quad (4.51)$$

Diese Gleichungen können in ein System überführt werden

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{\partial \underline{\Delta\sigma}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{\partial \underline{\Delta q}} \\ \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^i}{\partial \underline{\Delta\sigma}} & \frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^i}{\partial \underline{\Delta q}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\Delta\sigma}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \\ \frac{\partial \underline{\Delta q}}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \underline{R}_{\Delta\sigma}^i}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \\ -\frac{\partial \underline{R}_{\Delta q}^i}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

dessen Einträge denen der ersten beiden Zeilen der Tangentialmatrix (4.45) für die Materialgleichungen am Punkt entsprechen. Bestimmt man die Tangentialmatrix für den konvergierten Zustand neu und überträgt die berechneten Werte in die Formulierung (4.52), folgt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der konsistenten Tangente \underline{C} für die Finite-Element-Formulierung. Das Gleichungssystem stellt hierbei im mathematischen Sinne ein System mit mehreren rechten Seiten dar, bei dem sich die Einträge der konsistenten Tangente aus dem oberen 6x6-Block der Lösung ergeben.

4.4 Verfahren zur Identifikation der Modellparameter

4.4.1 Effiziente Datenhaltung mit HDF5

Das Materialverhalten von Asphalt und insbesondere des Bindemittels ist im hohen Maße viskos und temperaturabhängig. Zur Erfassung des Materialverhaltens ist daher ein Vielzahl an Versuchen notwendig, welche besonders für Kriechprozesse große Zeitbereiche abdecken müssen und somit zu umfangreichen Datenmengen führen. Da die Versuche im Regelfall an unterschiedlichen Versuchseinrichtungen durchgeführt werden, liegen die Versuchsdaten zudem in verschiedenen Formaten vor.

Im Rahmen der Parameteridentifikation müssen sowohl die Versuchsdaten als auch die Vergleichsergebnisse numerischer Simulationen in ein einheitliches Format überführt werden, um einen effizienten Identifikationsprozess zu ermöglichen. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierfür eine Datenbank auf Basis des *Hierarchical Data Format* (HDF) entwickelt und angewendet.

HDF ist ein Datenformat zur effizienten und flexiblen Speicherung numerischer Daten. Es hat insbesondere bei großen Datenmengen Vorteile, da die zugrunde liegenden Bibliotheken einen besonders schnellen Zugriff auf die Daten ermöglichen. Aufgrund der baumartigen, einem Dateisystem ähnlichen Struktur eignet sich dieses Format in idealer Weise dazu, die Vielzahl von Versuchen in ein einheitliches Format zu überführen. Zudem können die Simulationsergebnisse der Parameteridentifikation in äquivalenter Art und Weise in der gleichen HDF-Datei abgelegt werden. Dadurch ist ein effizienter Zugriff sowohl auf die Versuchsdaten als auch auf die Simulationsergebnisse möglich.

Das HDF-Format ermöglicht es, neben den reinen Messdaten zusätzliche Informationen abzulegen und somit die Reproduzierbarkeit und die Dokumentation zu erleichtern. Es existieren zahlreiche effiziente Schnittstellen zu Programmiersprachen wie z. B. C, C++ oder Python. Zudem wird das HDF-Format zunehmend als Standardformat in numerischen Programmen wie z. B. Matlab eingesetzt.

4.4.2 Evolutionsstrategie

Die Güte eines numerischen Materialmodells hängt neben der Formulierung der Modellgleichungen maßgeblich davon ab, inwieweit die Modellparameter des numerischen Modells anhand experimenteller Daten ermittelt werden können. Während es für einfache Materialmodelle mit wenigen Modellparametern oft möglich ist, diese direkt aus den experimentellen Versuchen herzuleiten, ist dies für komplexe Materialmodelle mit zahlreichen Modellparametern nicht möglich. Die Anpassung

fikation ist es, für ein ausgewähltes numerisches Materialmodell einen optimalen Satz von Modellparametern zu ermitteln, mit dem die numerische Beschreibung des Materialverhaltens erfolgen kann.

Experimentelle Daten liegen als diskrete Werte vor, so erhält man z. B. aus einaxialen Kriechversuchen diskrete Wertepaare für die Verschiebungen bzw. Dehnungen über die Zeit. Der Vergleich experimenteller Daten mit Ergebnissen numerischer Simulationen kann mathematisch über eine Zielfunktion erfolgen. Ziel der Optimierung mit der Evolutionsstrategie ist die Minimierung dieser Zielfunktion, die sich für den theoretischen Fall einer optimalen Lösung zu null ergibt.

Die Zielfunktion Z ist im Rahmen dieser Arbeit in Anlehnung an AHRENS ET AL. [3] formuliert. Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$Z = \|\underline{V}\| \quad \text{mit} \quad V_i = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} w_i^j |Y_i^j - X_i^j| \Delta t_i^j}{\sum_{j=1}^{N-1} \Delta Y_i^j \Delta t_i^j} . \quad (4.53)$$

Hierbei werden i verschiedene Experimente bei der Optimierung berücksichtigt. Sowohl die Versuchsergebnisse X_i^j als auch die Ergebnisse der Simulationen Y_i^j liegen hierbei als diskrete Werte an den Stützstellen j vor. Der zeitliche Verlauf des Experiments ist mit den diskreten Zeitintervallen Δt_i^j gegeben. Für jedes Zeitintervall können zusätzlich Wichtungsfaktoren w_i^j an den Stützstellen j definiert werden, um spezielle Bereiche des Experiments stärker oder schwächer in der Identifikation der Modellparameter zu berücksichtigen.

Die Zielfunktion entspricht dem Absolutwert der Differenz zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen. Um unterschiedliche Versuchstypen miteinander vergleichen zu können, erfolgt eine Normierung auf den Flächeninhalt der experimentellen Kurve bezüglich des Zeitbereichs.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte des eingesetzten evolutionären Algorithmus dargestellt und Details dazu erläutert. Hierbei wird für einen bestimmten Satz von Modellparametern das Synonym „Individuum“ verwendet. Werden mehrere solcher Individuen zusammen betrachtet, bezeichnet man sie als „Generation“.

Ausgangspunkt jeder Evolutionsstrategie ist die Festlegung eines zulässigen, physikalisch und mathematisch sinnvollen Parameterbereichs für jeden einzelnen Modellparameter. Innerhalb dieser Vorgabe werden mehrere Individuen erzeugt, deren einzelne Parameter zufällig aus dem Wertebereich ausgewählt werden. Die erzeugten Individuen bilden die initiale Elterngeneration für den evolutionären Algorithmus.

Die initiale Elterngeneration sowie alle im weiteren Verlauf des Algorithmus erzeugten Elterngenerationen werden zunächst einem Ranking anhand der Größe ihrer Zielfunktion unterzogen. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt diese „Fitness-Zuweisung“ mit Hilfe eines linearen Rankings, bei dem jedem Individuum einer Elterngeneration ein Wert zugewiesen wird, der dessen Güte angibt.

Im Anschluss an das Ranking erfolgt die Erzeugung von Nachkommen. Hierbei werden die Eltern eines jeden Nachkommen mit Hilfe einer fitnessproportionalen Selektion, der sogenannten Roulette-Selektion, ausgewählt. Die Auswahl erfolgt zufallsbasiert, wobei jedoch Individuen höherer Güte bevorzugt ausgewählt werden. Die Anzahl der erzeugten Nachkommen sollte deutlich größer sein als die Größe n der Elterngeneration. Im Rahmen dieser Arbeit können mit n^2 Nachkommen sehr gute Identifikationsergebnisse erzielt werden.

Jeder Nachkomme wird durch die Vererbung der Eigenschaften der Eltern-Individuen über eine intermediäre Rekombination gebildet. Hierbei wird im Gegensatz zur linearen Rekombination jede Eigenschaft für sich neu kombiniert. Die Bestimmung der neuen Eigenschaft, also des Werts eines Modellparameters, erfolgt dabei zufallsbasiert mit dem durch die Eigenschaften der Eltern definierten Bereich. In Abbildung 4.13 sind exemplarisch mögliche Nachkommen für ein Elternpaar dargestellt, welches zwei Parameter zu vererben hat.

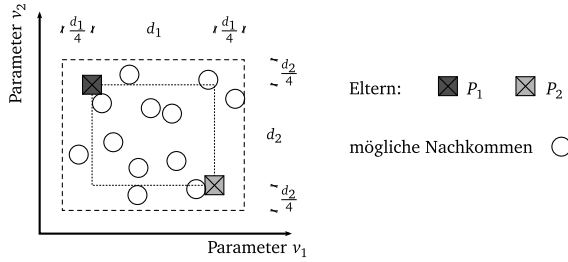


Abbildung 4.13: Bereich möglicher Nachkommen bei der intermediären Rekombination

Die erzeugten Nachkommen werden anschließend einer Mutation unterzogen, bei der einzelne Parameter zufällig verändert werden. Die Mutation erfolgt mit Hilfe des Mutations-Operators des *Breeder Genetic Algorithm*, bei dem sich der mutierte Parameter P_i^{Mut} zu

$$P_i^{Mut} = P_i + s_i \cdot r_i \cdot a_i \quad (4.54)$$

ergibt. Hierbei erfolgt die Auswahl des zu mutierenden Parameters P_i zufällig. Die Richtung der Mutation wird durch s_i bestimmt, dessen Wert zufallsbasiert mit 1 oder -1 angesetzt wird. Der Wert r_i bestimmt die Streubreite der Mutation, welche über den Definitionsbereich des Parameters P_i und die Mutationsbreite r bestimmt ist. Die Mutationsbreite wird in der Regel aus dem Bereich $[0,1; 10^{-6}]$ gewählt. Die Streuung wird über den Wert a_i gesteuert, welcher mit

$$a_i = 2^{-u \cdot k} \quad (4.55)$$

definiert ist. Hierbei steuern sowohl die Mutationsgenauigkeit $k = 4, 5, 6, \dots, 20$ als auch der zufällig aus dem Bereich $[0; 1]$ gewählte Faktor u , wie groß die Streuung ausfällt. Abbildung 4.14 stellt den Bereich möglicher Mutationen anschaulich dar.

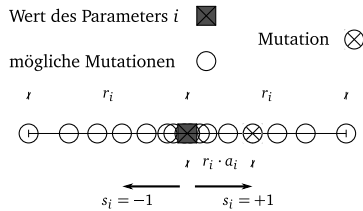


Abbildung 4.14: Mutationen bei Verwendung des *Breeder Genetic Algorithm*

Die Generation der Nachkommen wird äquivalent zur Elterngeneration über die Größe der Zielfunktion bewertet. Die besten Nachkommen bilden im Anschluss die neue Elterngeneration und der Evolutionsprozess beginnt von neuem. Der Prozess wird beendet, sobald die Zielfunktion des besten Individuums einer Generation den gewünschten Grenzwert unterschreitet.

Die Bestimmung der Zielfunktion beruht auf einem Vergleich experimenteller Ergebnisse mit Ergebnissen numerischer Simulationen. Bei einem umfangreichen experimentellen Programm müssen daher für jeden Parametersatz, also für jedes Individuum, eine Vielzahl von numerischen Einzelsimulationen durchgeführt werden. Diese Simulationen sind voneinander unabhängig, somit kann dieser Schritt effizient parallelisiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Parallelisierung anhand des Warteschlangenprinzips, bei dem alle notwendigen Simulationen für einen Parametersatz in einer Warteschlange gesammelt und sukzessive parallel mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Prozessoren abgearbeitet werden. Das Prinzip der Warteschlange ist in Abbildung 4.15 anschaulich dargestellt.

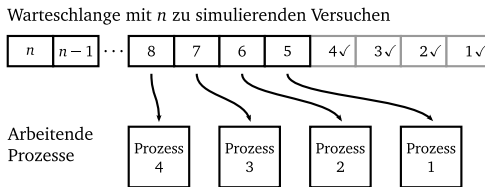


Abbildung 4.15: Parallelisierung nach dem Warteschlangenprinzip

5 Materialmodell der Bindemittelkomponente

Das als Bindemittel in Asphaltmischungen eingesetzte Bitumen zeichnet sich durch ein extrem temperaturabhängiges Verformungsverhalten aus. Während es für niedrige Temperaturen um -30°C als spröder Feststoff charakterisiert werden kann, zeigt Bitumen schon bei Temperaturen um 30°C ein hochviskoses, fluidartiges Verformungsverhalten. Weil das komplette Spektrum dieses Verformungsverhaltens mit Modellen der linearen Visko-Elastizität nur unzureichend erfasst werden kann, sind erweiterte Materialmodelle notwendig, die den inneren Aufbau bituminöser Bindemittel berücksichtigen können.

Bitumenhaltige Bindemittel gleichen in ihrer Struktur Polymerwerkstoffen, bei denen in einer öligen Phase gelöste, verknäulte Polymerketten das Verhalten maßgebend bestimmen. Netzwerke aus Polymerketten und gelösten Polymeren können zutreffend über selbstähnliche rheologische Modelle beschrieben werden. Selbstähnlich bzw. fraktal bedeutet hierbei, dass die rheologischen Grundelemente Feder und Dämpfer in einer baumartigen Struktur in unendlicher Abfolge angeordnet sind. Derartige fraktale Modelle können mit Hilfe fraktionaler Differentialgleichungen beschrieben werden.

5.1 Rheologische Modelle mit fraktionalen Zeitableitungen

Bereits 1695 erkennt LEIBNITZ in einem Briefwechsel mit L'HOSPITAL, dass der von ihm eingeführte Differentialoperator $\frac{d^n}{dx^n}$ für $n = \frac{1}{2}$ zu dem Paradoxon

$$d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{\frac{dx}{x}} \quad (5.1)$$

führt, aus dem sich jedoch „... eines Tages nützliche Konsequenzen ergeben werden.“ In den folgenden Jahren wird diese Vermutung bestätigt und die Grundlagen der fraktionalen Infinitesimalrechnung in zahlreichen Untersuchungen und Veröffentlichungen geschaffen. Einen detaillierten Überblick zu den mathematischen Grundlagen geben OLDHAM/SPANIER [90] sowie PODLUBNY [95].

Während NUTTING [87] bereits 1921 vermutet, dass sich die Spannungsrelaxation einiger Materialien mit Hilfe fraktionaler Ableitungen in der Zeit beschreiben lässt, kann eine erste Anwendung der fraktionalen Infinitesimalrechnung im Bereich der

Rheologie GEMANT [39] zugesprochen werden. Er postuliert 1936, dass der Bereich des Materialverhaltens zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten mit fraktionalen Differentialgleichungen beschrieben werden kann. In den folgenden Jahren entwickeln z. B. SCOTT BLAIR [104], BAGLEY/TORVIK [5] und KOELLER [56] rheologische Modelle, die auf fraktionalen Differentialgleichungen basieren. Sie zeigen, dass fraktionale Modelle viskoses Materialverhalten wesentlich besser wiedergeben können als die klassischen rheologischen Modelle mit ganzzahliger Ableitungsordnung, wie z. B. das ZENER-Modell [113].

Die Beschreibung des viskosen Verhaltens von Bitumen- und Asphaltwerkstoffen mit Hilfe fraktionaler Differentialgleichungen ist erst in den letzten Jahren näher untersucht worden. ASCHENBRENNER [4] beschreibt das Verhalten von bituminösem Bindemittel mit einem fraktionalen Burgers-Modell. OESER ET AL. [89] untersuchen die Anwendbarkeit fraktionaler Modelle auf Asphaltmischungen und zeigen, dass fraktionale Modelle die in Versuchen zu beobachtenden Phänomene sehr gut wiedergeben können.

Dessen ungeachtet werden bei der Modellierung von Bitumen- und Asphaltwerkstoffen bisher weitestgehend klassische Modelle mit ganzzahliger Ableitungsordnung eingesetzt. Dies mag vor allem an der oft mathematisch komplexen Darstellung fraktionaler Ableitungsoperatoren und der Algorithmen zur numerischen Lösung fraktionaler Differentialgleichungen liegen. Im folgenden Abschnitt wird eine Operatorformulierung vorgestellt, welche den Zugang zu Modellen mit fraktionalen Ableitungen erleichtert.

5.1.1 Herleitung des fraktionalen Elements mit Hilfe einer Operatorformulierung

Der mathematische Zugang zu fraktionalen Ableitungen ist für die Anwendung im ingenieurwissenschaftlichen Bereich wenig geeignet. Mit Hilfe der von KAI-XIN ET AL. [53] vorgestellten Operatorschreibweise kann der mathematische Ansatz anschaulich auf mechanische Problemstellungen übertragen werden. Hierzu wird das rheologische Modell eines fraktionalen Elements (*spring-pot*) untersucht, dessen Verformungsverhalten zwischen dem rheologischen Modell einer elastischen Feder und dem eines Newton-Dämpfers definiert ist.

Die konstitutive Gleichung für das rheologische Modell des fraktionalen Elements ist mit der Steifigkeit E und der Viskosität η als

$$\sigma = E \left(\frac{\eta}{E} \right)^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} \quad (5.2)$$

definiert. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung enthält in natürlicher Weise die Grenzfälle elastische Feder ($\alpha = 0$) und Newton'scher Dämpfer ($\alpha = 1$). Die für $0 < \alpha < 1$

auftretende Ableitung mit reellwertiger Ableitungsordnung ist für fraktionale Elemente charakteristisch.

Der *Heaviside Operational Calculus* [70, 71] ermöglicht es, Differentialoperatoren in einer algebraisch äquivalenten Form zu verwenden. Die mathematischen Hintergründe werden im Rahmen dieser Arbeit nicht erläutert, es werden lediglich die zur Untersuchung fraktionaler Elemente notwendigen Eigenschaften angegeben:

$$\mathcal{O}(\cdot) = A \frac{d}{dt}(\cdot) \iff \mathcal{O}(x) = A \frac{d}{dt}(x) \quad (5.3.1)$$

$$\mathcal{O}_1(x) + \mathcal{O}_2(x) = (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2)(x) \quad (5.3.2)$$

$$\mathcal{O}_1(x) = \mathcal{O}_2(y) \iff x = \frac{\mathcal{O}_2}{\mathcal{O}_1}(y) \quad (5.3.3)$$

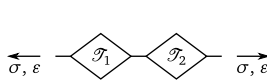
Führt man auf Basis dieser Eigenschaften den Heaviside-Operator

$$\mathcal{T}(\cdot) = E \left(\frac{\eta}{E} \right)^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(\cdot) \quad (5.4)$$

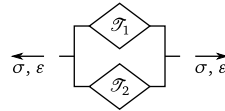
ein, kann die Spannungs-Dehnungs-Beziehung (5.2) für das fraktionale Element

$$\sigma = \mathcal{T} \varepsilon \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathcal{T} = E & \text{für } \alpha = 0 \\ \mathcal{T} = E^{(1-\alpha)} \eta^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ \mathcal{T} = \eta \frac{d}{dt} & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

angegeben werden.



5.1.1: Reihenschaltung



5.1.2: Parallelschaltung

Abbildung 5.1: Grundlegende Anordnungen fraktionaler Elemente

Für die anschauliche Herleitung fraktionaler Ableitungen ist die Untersuchung der Reihen- und Parallelschaltung zweier über Gleichung (5.5) definierter fraktionaler Elemente notwendig. Zunächst wird der für die Reihenschaltung (Abbildung 5.1.1) charakteristische Operator \mathcal{T}_R bestimmt. Mit der Äquivalenz der Spannungen

$$\sigma = \mathcal{T}_1 \varepsilon_1 = \mathcal{T}_2 \varepsilon_2 \stackrel{!}{=} \mathcal{T}_R \varepsilon \quad (5.6)$$

und der Dehnungsbilanz

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mathcal{T}_1^{-1} \sigma + \mathcal{T}_2^{-1} \sigma \quad (5.7)$$

$$= (\mathcal{T}_1^{-1} + \mathcal{T}_2^{-1}) \sigma \quad (5.8)$$

folgt der Operator

$$\mathcal{T}_R = \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2}. \quad (5.9)$$

Für eine Parallelschaltung (vgl. Abbildung 5.1.2) zweier fraktionaler Elemente gilt aufgrund der Dehnungsäquivalenz

$$\sigma_1 = \mathcal{T}_1 \varepsilon \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \mathcal{T}_2 \varepsilon. \quad (5.10)$$

Die Gesamtspannung σ kann somit über die Summe der Einzelspannungen mit

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \varepsilon \quad (5.11)$$

und der Ersatzoperator mit

$$\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \quad (5.12)$$

angegeben werden.

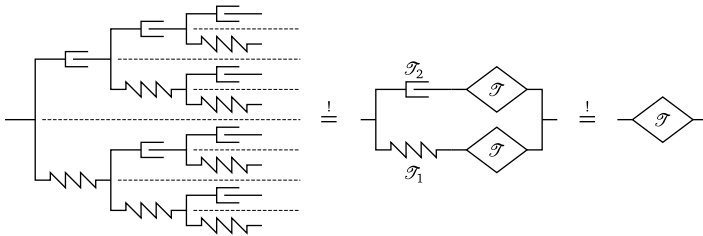


Abbildung 5.2: Selbstähnlichkeit fraktaler Baumstrukturen

Selbstähnliche bzw. fraktale Modelle zeichnen sich durch eine unendliche Reihe gleichartiger Grundelemente aus, welche in einer baumartigen Struktur angeordnet sind. Fasst man einen derartigen fraktalen Baum zu einem fraktionalen rheologischen Element zusammen, so muss die in Abbildung 5.2 dargestellte Beziehung gelten: Das fraktionale Element ist einer Parallelschaltung zweier fraktionaler Elemente mit jeweils einer Feder und einem Dämpfer gleichwertig. Diese Anordnung wiederum ist dem gesamten fraktalen Baum äquivalent. Es lässt sich daher mit Hilfe der Operatoren für die Reihen- und Parallelschaltung die folgende Gleichung für den fraktionalen Operator \mathcal{T} ableiten,

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T} \mathcal{T}_1}{\mathcal{T} + \mathcal{T}_1} + \frac{\mathcal{T} \mathcal{T}_2}{\mathcal{T} + \mathcal{T}_2}. \quad (5.13)$$

Für den in Abbildung 5.2 dargestellten Fall eines fraktalen Baums, welcher aus Federn der Steifigkeit E und Dämpfern der Viskosität η besteht, gilt mit $\mathcal{T}_1 = E$ und $\mathcal{T}_2 = \eta \frac{d}{dt}$ für den fraktionalen Operator

$$\mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2} = E^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.14)$$

Daraus folgt die konstitutive Gleichung für das einem fraktalen Baummodell äquivalente, fraktionale rheologische Element zu

$$\sigma = E^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} \varepsilon . \quad (5.15)$$

Es zeigt sich, dass das fraktale Modell aus einer unendlichen Reihe von Feder- und Dämpferelementen mit nur einem fraktionalen Element beschrieben werden kann und sich deshalb mit lediglich drei Modellparametern ein sehr breites Antwortspektrum darstellen lässt.

Die zuvor entwickelte konstitutive Gleichung gilt zunächst für den Spezialfall eines fraktalen Modells aus Feder- und Dämpferelementen mit gleicher Steifigkeit und Viskosität. Ersetzt man das Federelement \mathcal{T}_1 durch das entwickelte fraktionale Element, erhält man für den konstitutiven Operator dieses doppelt fraktalen Modells

$$\mathcal{T} = E^{\frac{1}{4}} \eta^{\frac{3}{4}} \frac{d^{\frac{3}{4}}}{dt^{\frac{3}{4}}} . \quad (5.16)$$

Ersetzt man dagegen das Dämpferelement, so folgt

$$\mathcal{T} = E^{\frac{3}{4}} \eta^{\frac{1}{4}} \frac{d^{\frac{1}{4}}}{dt^{\frac{1}{4}}} . \quad (5.17)$$

Im allgemeinen Fall gilt für $\mathcal{T}_1 = E^{(1-\alpha)} \eta^{\alpha} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}$ und $\mathcal{T}_2 = E^{(1-\beta)} \eta^{\beta} \frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}}$

$$\mathcal{T} = E^{(1-\frac{\alpha+\beta}{2})} \eta^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{d^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{dt^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} . \quad (5.18)$$

Für beliebige α und β zwischen null und eins können damit Ableitungsordnungen zwischen null und eins abgebildet werden.

5.1.2 Mathematische Definitionen fraktionaler Ableitungsoperatoren

Die mathematischen Eigenschaften der im vorherigen Abschnitt definierten fraktionalen Ableitung sind ausführlich in OLDHAM/SPANIER [90] beschrieben. Die drei maßgeblichen mathematischen Definitionen fraktionaler Ableitungen werden im Folgenden angegeben. Zudem wird für die weitere Untersuchung eine anschauliche Beschreibungsform ausgewählt.

Definiton nach Riemann-Liouville

Die n -fache Integration einer Funktion $f(t)$ nach Cauchy kann in allgemeiner Form mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-n} f(t) &:= \int_a^t \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_1} f(t_0) dt_0 \cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (5.19)$$

angegeben werden. Ersetzt man die Fakultät durch die Euler'sche Gammafunktion und n durch $\beta \in \mathbb{R}_+$, erhält man die Integrationsvorschrift

$${}_a D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (5.20)$$

für beliebige Integrationsordnungen β . Differenziert man diese Gleichung k -fach, erhält man die Definition fraktionaler Ableitungen der Ordnung $k-\beta$ nach Riemann-Liouville

$${}_a D_t^{k-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Für Ableitungsordnungen $0 \leq \alpha = k - \beta \leq 1$ und $k = 1$ folgt der Riemann-Liouville-Operator ${}^{RL}D^\alpha$ zu

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (5.22)$$

Die untere Grenze des Integrationsbereichs ist hierbei mit $a = t_0 = 0$ definiert, wobei t_0 den Startzeitpunkt des durch den fraktionalen Operator beschriebenen Prozesses kennzeichnet.

Definition nach Caputo

Im Gegensatz zur Definition nach Riemann-Liouville definiert Caputo den fraktionalen Operator über

$${}^C D^\alpha f(t) = D^{-(n-\alpha)} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad (5.23)$$

Hierbei wird die ganzzahlige Differentiation vor der reellwertigen Integration ausgeführt. Die wesentlichen Unterschiede zwischen den Operatoren ${}^{RL}D^\alpha$ und ${}^C D^\alpha$

sind z. B. in PODLUBNY [95] aufgeführt. Die Definition nach Caputo bietet den entscheidenden Vorteil, dass die zur Lösung von Anfangswertproblemen notwendigen Anfangsbedingungen nur für ganzzahlige Ableitungsordnungen anzugeben sind, während für die Definition nach Riemann-Liouville inhomogene Anfangsbedingungen über die fraktionale Ableitungsordnung der zu untersuchenden Funktion angegeben werden müssen. Dies ist jedoch bei physikalischen Phänomenen im Allgemeinen nur schwer oder gar nicht möglich.

Definition nach Grünwald-Letnikov

Die ganzzahlige Differentiation der Ordnung n kann mit Hilfe des Binomialkoeffizienten in eine dem Differentialquotienten äquivalente Form überführt werden. Es ergibt sich mit der Schrittweite h und der Ableitungsordnung $n \in \mathbb{N}$ die Grenzwertbetrachtung

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t + (n-j)h) \right\}. \quad (5.24)$$

Diese Grenzwertbetrachtung kann für beliebige positive reelle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ mit der Schrittweite $h = \frac{t}{N}$ in

$${}^{GL}D^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{\alpha}{i} f\left(t \left(1 - \frac{i}{N}\right)\right) \right) \quad (5.25)$$

überführt werden. Der fraktionale Operator ${}^{GL}D^\alpha$ nach Grünwald-Letnikov kann für hinreichend kleine Zeitschritte $\Delta t = \frac{t}{N}$ mit Hilfe der Stützstellen $f_k = f(t = k)$ durch die diskrete Form

$$D^\alpha f_N = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{\alpha}{i} f_{N-i} = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{i=0}^N w_i f_{N-i} \quad (5.26)$$

approximiert werden. Die Gewichte w_i der in Gleichung (5.26) definierten diskreten Grünwald-Reihe können über

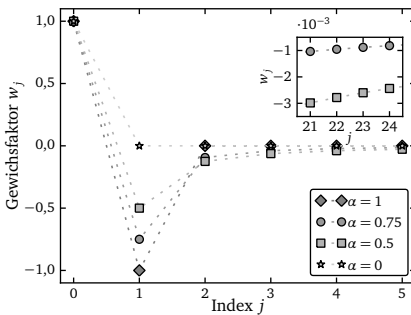
$$w_i = (-1)^i \binom{\alpha}{i} = \prod_{j=0}^i \frac{j - \alpha - 1}{j} = \frac{\Gamma(i - \alpha)}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(i + 1)} \quad (5.27)$$

mit einer Produktreihe oder durch die mit Hilfe der Gammafunktion verallgemeinerte Form des Binomialkoeffizienten bestimmt werden.

Der entscheidende Vorteil der Definition nach Grünwald-Letnikov ist, dass der Übergang auf finite Summen die numerische Approximation fraktionaler Ableitungen

und Integrale in anschaulicher Weise ermöglicht. Die Beschreibung von Anfangsbedingungen ist in natürlicher Weise in der Reihenentwicklung enthalten.

Mit Hilfe der Definition nach Grünwald-Letnikov können fraktionale Ableitungen im Bereich der für mechanische Problemstellungen relevanten Ableitungsordnungen $0 \leq \alpha \leq 2$ bestimmt werden. Die Approximation über bekannte Funktionswerte aus dem Berechnungsverlauf ist einer numerischen Untersuchung in natürlicher Art und Weise eigen. Im Gegensatz zur numerischen Berechnung mit ganzzahligen Ableitungsordnungen ist zu beachten, dass gegebenenfalls die gesamte Historie der fraktional abzuleitenden Größe bekannt sein muss. Dies muss in der numerischen Umsetzung berücksichtigt werden. In der vorliegenden Form (5.26) ist zudem eine konstante Zeitschrittweite notwendig.



5.3.1: Gewichtungsfaktoren

für $\alpha = 0$:

$$D^0 f_k = \frac{1}{\Delta t^0} ((1)f_k) = f_k$$

für $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} D^1 f_k &= \frac{1}{\Delta t^1} ((1)f_k + (-1)f_{k-1}) \\ &= \frac{f_k - f_{k-1}}{\Delta t} \rightarrow \text{Euler-Rückwärts} \end{aligned}$$

für beliebige α :

$$D^\alpha f_k = \frac{f_k}{\Delta t^\alpha} + \left(\frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^k w_j f_{k-j} \right) \rightarrow D_r^\alpha$$

5.3.2: spezielle Ableitungsordnungen

Abbildung 5.3: Verlaufsfunktion der Gewichtungsfaktoren der Grünwald-Reihe und die resultierenden Gleichungen

Mit Hilfe der in Abbildung 5.3.1 dargestellten Verläufe der Grünwald-Gewichte für verschiedene Ableitungsordnungen α können die Eigenschaften der Approximation mit der Grünwald-Reihe untersucht werden. Für den Grenzfall der linearen Feder mit $\alpha = 0$ ergeben sich alle Gewichte $w_{i>0}$ zu null und somit die Approximation für die nulle Ableitung zum aktuellen Funktionswert selbst. Für die diskrete Spannungs-Dehnungs-Beziehung an der Stützstelle j kann daher

$$\sigma_j = E \varepsilon_j \quad (5.28)$$

angegeben werden, was der diskreten Formulierung einer linearen Feder entspricht.

Für den Fall des linearen Dämpfers $\alpha = 1$ folgt die Approximation

$$\dot{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}}{\Delta t} = \eta \sigma_j, \quad (5.29)$$

was einer diskreten Approximation der Zeitableitung über das Euler-Rückwärts-Verfahren entspricht. Die Grenzfälle lineare Feder und Dämpfer sind somit in natürlicher Art und Weise in der Approximation enthalten¹.

Da das Gewicht $w_0 = 1,0$ unabhängig von der Ableitungsordnung α ist, kann die Berechnung der fraktionalen Ableitung über die Summe des Funktionswerts f_k an der aktuellen Stelle k und des Summationsrests D_r^α erfolgen,

$$D^\alpha f_k = f_k + D_r^\alpha \quad \text{mit} \quad D_r^\alpha = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^k w_j f_{k-j}. \quad (5.30)$$

Somit läßt sich der zu berechnende Wert stets aus einer endlichen Reihe bekannter Größen direkt bestimmen.

Die vollständige Auswertung des Summationsrests ist für in Zeitrichtung fein aufgelöste Diskretisierungen numerisch sehr aufwändig. Es zeigt sich jedoch, dass die Gewichte der Grünwald-Reihe asymptotisch gegen null streben. Wie in Abbildung 5.3.1 dargestellt, liegen die Gewichte schon für Indizes um $j = 20$ in der Größenordnung von $\approx 10^{-3}$. Diese als *fading memory* bezeichnete Eigenschaft der Grünwald-Gewichte führt dazu, dass weiter zurückliegende Geschichtswerte immer schwächer gewichtet in die Reihenentwicklung eingehen.

5.1.3 Numerische Lösung fraktionaler Differentialgleichungen

Eine analytische Lösung für Differentialgleichungen, welche fraktionale Ableitungsoperatoren beinhalten, kann im Allgemeinen nicht angegeben werden. Anfangswertaufgaben auf Basis fraktionaler Differentialgleichungen können daher nur mit geeigneten numerischen Verfahren gelöst werden. Äquivalent zu Differentialgleichungen mit ganzzahliger Ableitungsordnung erfordert die numerische Lösung fraktionaler Differentialgleichungen die Aufteilung des Berechnungsgebiets in diskrete Teilbereiche, wobei für die Auswertung rheologischer Modelle am festen Raumpunkt nur die Zeitrichtung zu diskretisieren ist.

Analog zur numerischen Approximation ganzzahliger Zeitableitungen existiert eine Vielzahl numerischer Verfahren zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen. Sie unterscheiden sich bezüglich der mathematischen Beschreibung der fraktionalen Ableitungen sowie in ihrer Genauigkeit und in der Anzahl der zu berücksichtigenden Stützstellen in Zeitrichtung. Einen ausführlichen Überblick über die wichtigsten numerischen Verfahren zur Lösung fraktionaler Differentialgleichungen sowie deren Vor- und Nachteile geben DIETHELM ET AL. [27]. Geeignete Verfahren für den

¹Die Approximation mit der Grünwald-Reihe ist auch für Ableitungsordnungen $\alpha > 1$ gültig. So ergibt sich die Approximation der Ableitung für $\alpha = 2$ zu $D^2 f_k = \frac{f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}}{\Delta t^2}$, was eine hinreichend genaue Näherung für die 2. Ableitung darstellt.

Einsatz im Rahmen von Finite-Element-Methoden stellen u. a. PADOVAN [91], ENELUND/JOSEFSON [33] oder SCHMIDT/GAUL [103] vor.

ASCHENBRENNER [4] vergleicht zahlreiche numerische Verfahren und zeigt, dass das von FORD/SIMPSON [36] vorgestellte *nested mesh*-Prinzip numerisch stabil und effizient ist und sich somit besonders für einen Einsatz in einem Verbundmodell eignet.

5.1.4 Das „nested mesh“-Prinzip

In detaillierten Untersuchungen zeigen FORD/SIMPSON [36], dass unter Verwendung des *fixed mesh*-Prinzips, bei dem die Historie ab einer bestimmten Anzahl von Zeitschritten N_T^{fixed} vollständig vernachlässigt wird, der numerischen Aufwand konstant gehalten werden kann. Es zeigt sich jedoch auch, dass für die Einhaltung einer Fehlerschranke $O(h^p)$ die Länge N_T^{fixed} fast das komplette zu untersuchende Intervall abdecken muss und somit der Vorteil des geringeren numerischen Aufwands hinfällig wird.

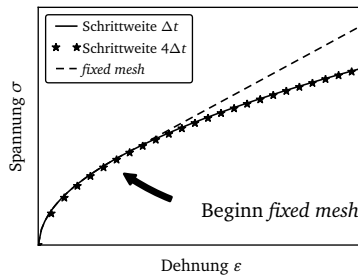


Abbildung 5.4: Entwicklung des Fehlers beim *fixed mesh*-Prinzip

Die Analyse der Spannungsantwort eines Maxwell-Körpers mit der Ableitungsordnung $\alpha = 0,5$ auf eine linear in der Zeit verlaufende Dehnung kann diesen Sachverhalt anschaulich belegen. Die in Abbildung 5.4 dargestellte Referenzlösung ist mit einer fiktiven Schrittweite $h = \Delta t$ über das gesamte zu untersuchende Intervall mit N_{ges} Schritten bestimmt. Für eine feste Auswertlänge $N_T^{fixed} = \frac{1}{4}N_{ges}$ zeigt sich, dass für den Bereich mit unvollständiger Auswertung des fraktionalen Operators eine starke Abweichung von der Referenzlösung zu beobachten ist.

Berechnet man dagegen die Spannungsantwort mit einer 4-fach größeren Schrittweite $\tilde{h} = 4\Delta t$, erhält man eine wesentlich bessere Approximation der Referenzlösung bei einem äquivalenten numerischen Aufwand im Vergleich zum *fixed mesh*-Ansatz. Diese Skalierungseigenschaft nutzen FORD/SIMPSON und führen das Prinzip der *nested meshes* ein. Unter Ausnutzung des *fading memory*-Effekts wird die nahe

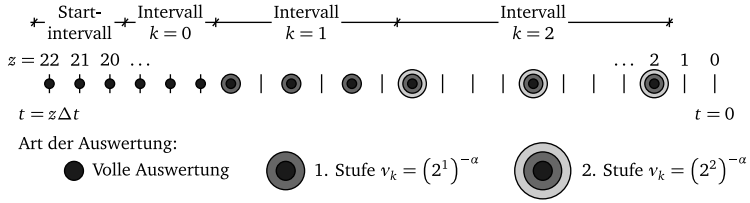


Abbildung 5.5: *nested mesh*-Algorithmus mit $z = 22$ und $N_T = 3$

Vergangenheit vollständig ausgewertet, während zeitlich weiter zurückliegende Bereiche mit einer größeren Auflösung berücksichtigt werden. Im Gegensatz zum *fixed mesh*-Prinzip kann mit Hilfe des vorgeschlagenen Verfahrens eine Fehlerordnung von $O(h^p)$ bei einem deutlich verringerten numerischen Aufwand eingehalten werden.

ASCHENBRENNER überträgt das für eine Auswertung der Caputo-Form entwickelte Verfahren auf die Approximation mit Hilfe der Grünwald-Reihe. Der zugrundeliegende Algorithmus wird im Folgenden anhand des in Abbildung 5.5 dargestellten Beispiels vorgestellt. Es ist zu beachten, dass der gewählte Bereich der vollständigen Auswertung mit $N_T = 3$ nicht dem für eine hinreichend genaue Approximation realer Problemstellungen notwendigen Wert entspricht. Es hat sich gezeigt, dass für mechanische Problemstellungen Werte von $N_T = 100 \sim 250$ sehr gute Approximationsergebnisse ermöglichen.

Im ersten Bereich sowie im Intervall $k = 0$ erfolgt eine vollständige Auswertung der Grünwald-Reihe. Für das Beispiel gehen daher die Punkte mit den Indizes 21 bis 17 in die Auswertung ein. Für das Intervall $k = 1$ wird die Schrittweite mit $2\Delta t$ angesetzt, die Auswertung erfolgt nun mit einer doppelten Schrittweite bis N_T Geschichtswerte auf dem gröberen Netz in die numerische Auswertung des Integrals eingegangen sind. Im konkreten Fall gehen daher die Punkte 16, 14 und 12 in die Auswertung ein. Für die Folgeintervalle $k \geq 2$ wird diese Prozedur mit einer Schrittweite $2^k \Delta t$ für das jeweilige Intervall wiederholt, bis der Startwert f_0 erreicht ist. Im gegebenen Beispiel verbleibt daher das Intervall $k = 2$ auszuwerten, die zu berücksichtigenden Punkte tragen die Indizes 10, 6 und 2. Der Summationsrest für die fraktional abzuleitende Größe f am Punkt $n = 22$ ergibt sich daher mit der *nested mesh*-Schrittweite $N_T = 3$ aus der Summe der Summationsreste der Teilbereiche zu

$$D_R^\alpha(f_n) = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^{2N_T-1} w_j f_{n-j} + \frac{1}{2\Delta t^\alpha} \sum_{j=N_T}^{2N_T-1} w_j f_{n-2j} + \frac{1}{2^2 \Delta t^\alpha} \sum_{j=N_T}^{2N_T-1} w_j f_{n-2^2 j}. \quad (5.31)$$

Der Algorithmus zur Berechnung des Summationsrests ist in dem in Abbildung 5.6 dargestellten Struktogramm für die Implementierung aufgearbeitet.

Setze Zeitindex z auf letzten konvergierten Zeitschritt s Setze Gewichtsindex $j = 1$							
Solange Zeitindex z im Startintervall $[s, s - n_T]$							
Berechne Grünwald-Gewicht $w_j = \prod_{i=1}^j \frac{i-\alpha-1}{i}$ Addiere gewichteten Anteil $w_j \cdot \varepsilon_{vp}[z]$ zu \underline{D}_r^α Verringere den Zeitindex z um 1 Erhöhe den Gewichtsindex j um 1							
Setze Intervallindex $k = 0$							
Solange Zeitindex $z \geq 0$							
<table border="1"> <tr> <th colspan="2">Passen die verbleibenden Indizes ins Intervall?</th></tr> <tr> <th>Ja</th><th>Nein</th></tr> <tr> <td> Setze neuen Gewichtsindex $j = \frac{s-z}{2^k} + 1$ Setze Dekrementor zu 2^k Setze <i>nested mesh</i>-Faktor zu $v_k = (2^k)^{-\alpha}$ </td><td> Werte die verbleibenden Indizes auf dem aktuellen Netz aus </td></tr> </table>		Passen die verbleibenden Indizes ins Intervall?		Ja	Nein	Setze neuen Gewichtsindex $j = \frac{s-z}{2^k} + 1$ Setze Dekrementor zu 2^k Setze <i>nested mesh</i> -Faktor zu $v_k = (2^k)^{-\alpha}$	Werte die verbleibenden Indizes auf dem aktuellen Netz aus
Passen die verbleibenden Indizes ins Intervall?							
Ja	Nein						
Setze neuen Gewichtsindex $j = \frac{s-z}{2^k} + 1$ Setze Dekrementor zu 2^k Setze <i>nested mesh</i> -Faktor zu $v_k = (2^k)^{-\alpha}$	Werte die verbleibenden Indizes auf dem aktuellen Netz aus						
Solange Index z im Intervall $[s - 2^k n_T, s - 2^{k+1} n_T]$							
Berechne Grünwald-Gewicht $w_j = \prod_{i=1}^j \frac{i-\alpha-1}{i}$ Addiere gewichteten Anteil $v_k \cdot w_j \cdot \varepsilon_{vp}[z]$ zu \underline{D}_r^α Verringere den Zeitindex z um den Dekrementor Erhöhe den Gewichtsindex j um 1							
Erhöhe den Intervallindex k um 1							

Abbildung 5.6: Algorithmus zur Berechnung des Summationsrests \underline{D}_r^α

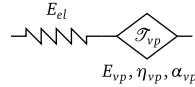
5.1.5 Vergleich fraktionaler Modelle

Mit Hilfe des Modellansatzes für das fraktionale Element können die rheologischen Standardmodelle erweitert werden. Im Folgenden werden die in Abbildung 5.7 dargestellten fraktionalen Modelle näher untersucht, insbesondere wird die Wahl eines für das Verbundmodell geeigneten Materialmodells der Bitumenkomponente begründet. Das Materialmodell soll hierbei das Spektrum des nichtlinearen Materialverhaltens mit einer möglichst geringen Anzahl von Modellparametern zutreffend wiedergeben.

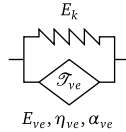
Die Differentialgleichungen der fraktionalen Elemente können mit Hilfe der Approximation der fraktionalen Zeitableitung mit der Grünwald-Reihe in einfacher Weise in diskrete Gleichungen überführt und in numerischen Analysen untersucht werden. Hierzu wird die Spannungsantwort infolge einer konstanten Dehnrates (Abbildung 5.8) – nachfolgend als Zugversuch bezeichnet – sowie die Dehnungsantwort infolge einer konstanten Spannung mit anschließender Entlastungsphase (Abbildung 5.9) –



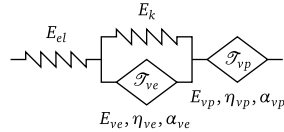
5.7.1: Fraktionales Element



5.7.2: Maxwell-Modell



5.7.3: Kelvin-Voigt-Modell



5.7.4: Burgers-Modell

Abbildung 5.7: Erweiterte rheologische Grundkörper

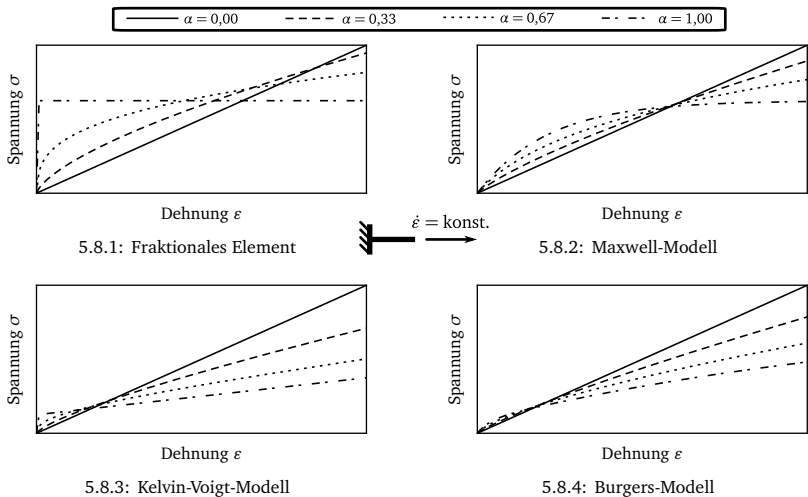


Abbildung 5.8: Spannungsantworten bei konstanten Dehnraten $\dot{\varepsilon}$ für verschiedene fraktionale Modelle

Kriechversuch – bestimmt und qualitativ mit den in Versuchen zu beobachtenden Phänomenen verglichen.

Im Zugversuch stellt sich eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung ein, bei der die Steifigkeit infolge sich einstellender viskoser Dehnungsanteile abnimmt. Eine Aufteilung der Dehnungsanteile in elastische, visko-elastische und visko-plastische Anteile ist mit dem Zugversuch allein nur schwer möglich.

Der Kriechversuch ist in idealer Weise geeignet, einzelne Dehnungsanteile bestimm-

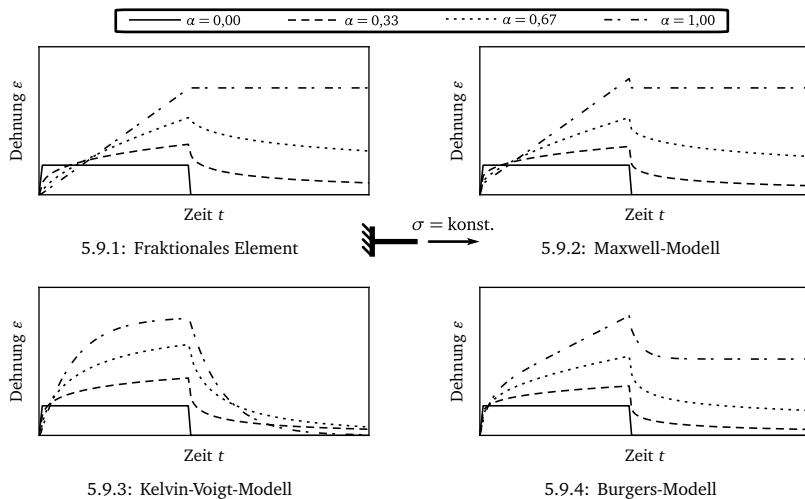


Abbildung 5.9: Dehnungsantwort für eine konstante Spannung σ (Be- und Entlastung) für verschiedene fraktionale Modelle

ten Phänomenen zuzuordnen. Nach einer elastischen Anfangsverformung kann im Kriechversuch infolge einer konstanten Spannung eine nichtlineare Dehnungsantwort beobachtet werden, bei der die Zunahme der Dehnung über die Zeit abnimmt. Nach der Entlastung kommt es zu einer Rückstellung der elastischen Dehnungsanteile, während im weiteren Verlauf ein viskoses Rückkriechen bis zu einer verbleibenden visko-plastischen Dehnung zu beobachten ist.

Für die in den Abbildungen 5.8 und 5.9 dargestellten Ergebnisse gilt, dass sich für die Ableitungsordnung $\alpha = 0$ alle Modelle auf eine Feder reduzieren lassen und somit die sich einstellenden Spannungen und Dehnungen dem Modell der Hooke-Feder entsprechen. Wählt man die Ableitungsordnung $\alpha = 1$ für alle im jeweiligen Modell auftretenden fraktionalen Elemente, so ergeben sich die bekannten Spannungs- und Dehnungsantworten der rheologischen Standardmodelle.

Das fraktionale Element

Als fraktionales Element wird das in Abbildung 5.7.1 dargestellte Element mit fraktionaler Ableitungsordnung bezeichnet. Die Differentialgleichung für das fraktionale Element lautet

$$\sigma = E \left(\frac{\eta}{E} \right)^\alpha D^\alpha \varepsilon. \quad (5.32)$$

Am Beispiel des fraktionalen Elements kann sehr gut veranschaulicht werden, wie man mit Hilfe der Approximation der fraktionalen Operatoren über eine Grünwald-Reihe eine inkrementelle, algebraische Formulierung zur Berechnung von Spannungen und Dehnungen erhält. Ersetzt man die fraktionalen Ableitungsoperatoren durch die diskreten Ausdrücke (5.30), folgt die inkrementelle Form zur Berechnung der Dehnung bei gegebener Spannung $\sigma = \hat{\sigma}$ zu

$$\varepsilon_j = \Delta t^\alpha E^{(\alpha-1)} \eta^{(-\alpha)} \hat{\sigma}_j - D_r^\alpha (\varepsilon_j) . \quad (5.33)$$

Für den Fall einer gegebenen Dehnung $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ folgt die Spannung

$$\sigma_j = \frac{1}{\Delta t^\alpha} E^{(1-\alpha)} \eta^\alpha (\hat{\varepsilon}_j + D_r^\alpha (\hat{\varepsilon}_j)) . \quad (5.34)$$

Während die Spannung bei gegebener Dehnung direkt für jeden Zeitschritt bestimmt werden kann, ist für die Bestimmung der Dehnung die Kenntnis der gesamten Historie notwendig. Mit Hilfe der Gleichungen (5.33) und (5.34) ist bei einer angemessenen Größe der Zeitschrittweite Δt eine hinreichend genaue Approximation des Verformungsverhaltens möglich.

Das fraktionale Element kann für reellwertige Ableitungsordnungen sowohl viskoses Fließen als auch bleibende Dehnungen abbilden (vgl. hierzu die Abbildungen 5.8.1 und 5.9.1). Elastische Vorgänge können aufgrund der nicht vorhandenen Einzelfeder nicht abgebildet werden.

Das fraktionale Maxwell-Modell

Das fraktionale Maxwell-Modell setzt sich aus der Reihenschaltung einer Hooke-Feder mit einem fraktionalen Element zusammen (Abbildung 5.7.2). Die Differentialgleichung für das fraktionale Maxwell-Modell lautet

$$\sigma + \frac{E_{vp}}{E_{ve}} \left(\frac{\eta_{vp}}{E_{vp}} \right)^\alpha D^\alpha \sigma = E_{vp} \left(\frac{\eta_{vp}}{E_{vp}} \right)^\alpha D^\alpha \varepsilon . \quad (5.35)$$

Die gegebene Differentialgleichung kann in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt werden, bei dem die visko-plastischen Dehnungen ε_{vp} im fraktionalen Element als innere Variable auftreten,

$$\sigma = E_{el} (\varepsilon - \varepsilon_{vp}) \quad (5.36)$$

$$D^\alpha \varepsilon_{vp} = \frac{1}{E_{vp}} \left(\frac{E_{vp}}{\eta_{vp}} \right)^\alpha \sigma . \quad (5.37)$$

Über einfache Umformungen kann die Differentialgleichung (5.35) äquivalent zum fraktionalen Element in eine inkrementelle, algebraische Form überführt werden.

Für den Einsatz des Materialmodells im Rahmen der Finite-Element-Methode sollte das Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwendet werden, um die Mehraxialität des Materialverhaltens einfach berücksichtigen zu können.

Das fraktionale Maxwell-Modell kann, wie in Abbildung 5.9.2 dargestellt ist, im Gegensatz zum klassischen Maxwell-Modell viskose Kriechvorgänge und gleichzeitig bleibende Verformungen abbilden. Es kann ebenso die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Zugversuch wiedergeben, Abbildung 5.8.2. Die Reihenschaltung mit einer Feder ermöglicht darüber hinaus die Modellierung elastischen Materialverhaltens.

Das fraktionale Kelvin-Voigt-Modell

Die in Abbildung 5.7.3 dargestellte Parallelschaltung eines fraktionalen Elements mit einer Hooke-Feder wird fraktionales Kelvin-Voigt-Modell genannt. Die Differentialgleichung folgt aus Gleichung (5.12) zu

$$\sigma = E_k \varepsilon + E_{ve} \left(\frac{\eta_{ve}}{E_{ve}} \right)^\alpha D^\alpha \varepsilon. \quad (5.38)$$

Das grundlegende Verformungsverhalten des fraktionalen Kelvin-Voigt-Modells kann den Abbildungen 5.8.3 sowie 5.9.3 entnommen werden. Mit Hilfe des Modells kann visko-elastisches Materialverhalten modelliert werden. Infolge der parallel angeordneten Feder können sich jedoch keine bleibenden Dehnungen einstellen. Ebenso ist das Modell nicht in der Lage, rein elastische Zustände abzubilden.

Das fraktionale Burgers-Modell

Das fraktionale Burgers-Modell folgt aus der Reihenschaltung eines fraktionalen Kelvin-Voigt-Körpers mit einem fraktionalen Maxwell-Körper (Abbildung 5.7.4). Das Verformungsverhalten kann mit der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} E_{el} E_k \sigma + (E_{el} + E_k) E_{vp} \left(\frac{\eta_{vp}}{E_{vp}} \right)^{\alpha_{vp}} D^{\alpha_{vp}} \sigma + E_{el} E_{ve} \left(\frac{\eta_{ve}}{E_{ve}} \right)^{\alpha_{ve}} D^{\alpha_{ve}} \sigma + \\ E_{ve} \left(\frac{\eta_{ve}}{E_{ve}} \right)^{\alpha_{ve}} E_{vp} \left(\frac{\eta_{vp}}{E_{vp}} \right)^{\alpha_{vp}} D^{(\alpha_{ve} + \alpha_{vp})} \sigma \\ = E_{el} E_k E_{vp} \left(\frac{\eta_{vp}}{E_{vp}} \right)^{\alpha_{vp}} D^{\alpha_{vp}} \varepsilon + E_{el} E_{ve} \left(\frac{\eta_{ve}}{E_{ve}} \right)^{\alpha_{ve}} E_{vp} \left(\frac{\eta_{vp}}{E_{vp}} \right)^{\alpha_{vp}} D^{(\alpha_{ve} + \alpha_{vp})} \varepsilon \end{aligned} \quad (5.39)$$

beschrieben werden. Die auftretenden Ableitungsordnungen $0 \leq \alpha \leq 2$ können mit der Grünwald-Reihe hinreichend genau approximiert werden.

Äquivalent zum klassischen Burgers-Modell mit ganzzahliger Ableitungsordnung können die im Zugversuch (Abbildung 5.8.4) und im Kriechversuch (Abbildung 5.9.4) auftretenden Phänomene zutreffend wiedergegeben werden. Es können sich elastische sowie plastische Dehnungsanteile einstellen.

Die Bindemittelkomponente wird im Rahmen dieser Arbeit mit dem fraktionalen Maxwell-Modell beschrieben. Dieses Modell kann die in den zur Verfügung stehenden Versuchen auftretenden Spannungs- und Dehnungsantworten zutreffend wiedergeben. Zudem ist die Anzahl der notwendigen Modellparameter kleiner als beim fraktionalen Burgers-Modell, was sich positiv im Hinblick auf die Integration in das angestrebte Verbundmodell auswirkt.

5.1.6 Norton-Ansatz für das fraktionale Maxwell-Element

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass die Dehnrate nichtlinear von den Spannungen abhängt. Dieser Zusammenhang kann mit einem Kriechmodell nach Norton, auch als *power-creep law* bezeichnet, beschrieben werden. Die nichtlineare Abhängigkeit der Dehnrate $\dot{\varepsilon}$ von der Spannung σ lässt sich mit

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (5.40)$$

beschreiben. Hierbei stellen ε_0 und σ_0 Bezugsgrößen dar; der Spannungsexponent n bestimmt den Grad der Nichtlinearität. Stellt man die gegebene Gleichung nach den Spannungen um, erhält man

$$\sigma^n = \frac{\sigma_0^n}{\dot{\varepsilon}_0} \dot{\varepsilon} = \tilde{\eta} \dot{\varepsilon} \quad (5.41)$$

und kann den Vorfaktor $\tilde{\eta}$ als nichtlineare Viskosität deuten, welche mit einem Arrhenius-Ansatz temperaturabhängig beschrieben werden kann, vgl. hierzu auch CHEUNG/CEBON [18].

Für die Übertragung des Norton-Ansatzes auf das fraktionale Maxwell-Modell wird die fraktionale Differentialgleichung für die visko-plastischen Dehnungsanteile mit

$$D^\alpha \varepsilon_{vp} = E_{vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^{n_{vp}}} \sigma^{(n_{vp}-1)} \right)^\alpha \sigma \quad (5.42)$$

angesetzt. Die gewählte Modellierung beinhaltet als Grenzwerte die lineare Feder sowie einen über das Norton'sche Kriechmodell formulierten Dämpfer und ist für alle möglichen Ableitungsordnungen einheitenkonform,

$$\left[\frac{1}{s} \right]^\alpha = \left[\frac{N}{mm^2} \right]^\alpha \left[\frac{mm^2}{N} \right] \left[\frac{1}{s} \frac{mm^2}{N} \right]^\alpha \left[\frac{N}{mm^2} \right]. \quad (5.43)$$

Der Ansatz unterscheidet sich maßgeblich von dem von ASCHENBRENNER [4] gewählten Modell, bei dem der gesamte Vorfaktor in eine Ersatzviskosität $\tilde{\eta}$ übergeht,

$$\tilde{\eta} = E_{vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0^{n_{vp}}} \right)^\alpha. \quad (5.44)$$

Ein entscheidender Vorteil der erweiterten Formulierung (5.42) ist die eindeutige Trennung der Modellparameter fraktionale Ableitungsordnung α , Spannungsexponent n und des die nichtlineare Viskosität abbildenden Ausdrucks $\frac{\sigma_0^n}{\dot{\epsilon}_0}$, da hiermit die für die Parameteridentifikation essentielle Unabhängigkeit der Modellparameter gewährleistet ist. Im Vergleich zum Modell von ASCHENBRENNER sind drei zusätzliche Parameter für das fraktionale Element notwendig: die Steifigkeit E_{vp} des fraktionalen Elements, die Bezugsdehnrate $\dot{\epsilon}_0$ sowie die Bezugsspannung σ_0 . Da der Maxwell-Körper für die Beschreibung der Bitumenkomponente verwendet wird, steigt die Gesamtzahl der Modellparameter im Vergleich zum Verbundmodell von ASCHENBRENNER nicht.

5.1.7 Beschreibung der Temperaturabhängigkeit

Das Verhalten der Bindemittelkomponente ist stark von der Temperatur abhängig. Es zeigt sich, dass vor allem die viskosen Eigenschaften von der Temperatur abhängen. ASCHENBRENNER beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Bindemittelkomponente über die Modellparameter der Ersatzviskositäten $\tilde{\eta}_{ve}$ und $\tilde{\eta}_{vp}$.

Für die Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Bindemittelviskosität wird im Allgemeinen der Arrhenius-Ansatz

$$\eta(T) = \eta^{0K} e^{\frac{Q}{RT}} \quad (5.45)$$

verwendet [4, 18, 38]. Dabei ergibt sich die Viskosität für die Temperatur T aus einem Bezugswert η^{0K} bei einer Temperatur von $T = 0K$, der Aktivierungsenergie Q und der allgemeinen Gaskonstante $R = 8,314 \cdot 10^{-3} \text{ kJ/Kmol}$. Ein Nachteil der Beschreibung der Temperaturabhängigkeit über die Arrhenius-Funktion ist, dass der Bezugswert η^{0K} keine physikalisch anschauliche Größe darstellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Viskosität über die Bezugsgrößen $\dot{\epsilon}_0$, σ_0 und den Exponenten n beschrieben. Die Temperaturabhängigkeit wird im gewählten Modell allein der Bezugsspannung σ_0 zugewiesen, die Bezugsdehnrate $\dot{\epsilon}_0$ und der Exponent n werden dagegen als konstant über den gesamten Temperaturbereich angesetzt. Die Temperaturabhängigkeit der Bezugsspannung wird als

$$\sigma_0(\Theta) = \sigma_0^{0^\circ\text{C}} e^{W_{\sigma_0}^q \cdot \Theta^2 + W_{\sigma_0}^l \cdot \Theta} \quad \text{mit } \Theta \text{ in } ^\circ\text{C} \quad (5.46)$$

definiert. Die gewählte Beschreibung stellt für den relevanten Temperaturbereich von -40°C bis 50°C eine hinreichend genaue Approximation der Arrhenius-Funktion dar und bietet den Vorteil, dass die Bezugsgröße den anschaulichen Wert der Bezugsspannung für 0°C darstellt.

Im Rahmen der Auswertung des im nachfolgenden Abschnitt beschriebenen Versuchsprogramms und der damit verbundenen Parameteridentifikation zeigt sich, dass die Beschreibung der Temperaturabhängigkeit allein über den die Viskosität repräsentierenden Parameter σ_0 nicht geeignet ist, das Materialverhalten zutreffend wiederzugeben. Daher werden die Steifigkeit E_{el} der elastischen Feder und die Steifigkeit E_{vp} des fraktionalen Elements ebenfalls temperaturabhängig formuliert.

Äquivalent zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Bezugsspannung σ_0 wird ein dem relevanten Temperaturbereich angepasster Funktionsverlauf definiert. Es gilt

$$E(\Theta) = E^{0^{\circ}\text{C}} e^{W_E \cdot \Theta} \quad \text{mit } \Theta \text{ in } ^{\circ}\text{C} \quad (5.47)$$

sowohl für die Steifigkeit der elastischen Feder als auch für die Steifigkeit des fraktionalen Elements.

Es zeigt sich, dass das Verhalten des Bindemittels mit dem gewählten Ansatz über einen breiten Temperaturbereich sehr gut wiedergegeben werden kann.

5.2 Versuchsprogramm und Parameteridentifikation

Die Identifikation der temperaturabhängigen Modellparameter des fraktionalen Maxwell-Modells zur Beschreibung der Bitumenkomponente erfolgt anhand eines umfangreichen Versuchsprogramms, welches in Zusammenarbeit mit dem Institut für Straßenwesen der TU Braunschweig (ISBS) erarbeitet ist. Die Versuche sind derart gestaltet, dass sie sowohl das temperaturabhängige Verhalten des Bindemittels widerspiegeln als auch die geschwindigkeitsabhängige Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungs-Beziehung und das nichtlineare Kriechverhalten abbilden können.

Hierzu sind weggeregelte Zug- und Druckversuche sowie kraftgeregelte Kriechversuche am ISBS durchgeführt, welche einen breiten Temperaturbereich sowie ein ausgeprägtes Belastungsspektrum abdecken. Die Messdaten liegen in elektronischer Form vor und sind hinsichtlich einer effizienten Anbindung an die Identifikationsroutine in eine HDF5-Datenbank überführt. Als Bindemittel kommt ein unmodifiziertes Bitumen 50/70 zum Einsatz. Im Hinblick auf den Modellierungsansatz mit Hilfe der Mischungstheorie wird dem Bindemittel der als Füller bezeichnete Feinstkornanteil der Mineralstoffkomponente zugeschlagen. Sämtliche untersuchten Probekörper bestehen daher aus einem Bitumen-Füller-Gemisch, welches im weiteren Verlauf als Bindemittel bezeichnet wird.

5.1.1: weggeregelte Versuche

Versuchstyp	Θ in [°C]	Dehnraten $\dot{\epsilon}$ in [$1/s$]
Druckversuch Klimak.	-20 ; -10 ; 0	$5,6 \cdot 10^{-3}$; $1,4 \cdot 10^{-3}$; $1,1 \cdot 10^{-2}$
Zugversuch Wasserbad	10 ; 20 ; 30	$1,0 \cdot 10^{-5}$; $1,0 \cdot 10^{-4}$; $1,0 \cdot 10^{-3}$

5.1.2: kraftgeregelte Versuche

Versuchstyp	Θ in [°C]	Belastung σ in [MPa]
Kriechversuch Klimakammer	-20 ; -10 ; 0	0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 1,0

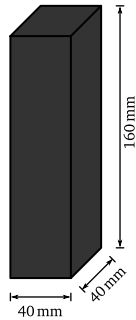
Tabelle 5.1: Übersicht der Versuche am Bindemittel

Das in Tabelle 5.1 zusammengefasste Versuchsprogramm wird nachfolgend erläutert. Darüber hinaus werden die Versuchsergebnisse den Simulationsergebnissen gegenüber gestellt. Die numerischen Simulationen beruhen auf einem optimalen Satz von Modellparametern, welcher aus dem Identifikationsprozess mit der in Abschnitt 4.4.2 beschriebenen Evolutionsstrategie folgt.

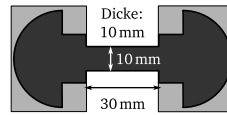
5.2.1 Zug- und Druckversuche

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung und insbesondere die Abhängigkeit dieser von der Verzerrungsgeschwindigkeit wird anhand von einaxialen weggeregelten Versuchen untersucht. Hierfür werden die in Abbildung 5.10.1 dargestellten prismatischen Probekörper in eine Klimakammer eingebaut und einaxial belastet. Die Probekörper sind mit Hilfe eines Spezialklebers an dem Aufnehmer der Prüfmaschine befestigt. Es zeigt sich, dass im Gegensatz zu Asphaltprobekörpern die Klebung eine Schwachstelle darstellt und ein Versagen schon bei kleinen Lasten im Bereich der Klebestelle auftritt. Daher werden die weggeregelten Versuche in der Klimakammer auf eine Druckbelastung umgestellt, was bei der Annahme isotropen Materialverhaltens des Bindemittels gerechtfertigt ist. Die Druckversuche in der Klimakammer sind unter den in Tabelle 5.1.1 angegebenen Randbedingungen durchgeführt.

Für den Temperaturbereich ab 10 °C ist das Bindemittel hochviskos. Aufgrund der hohen Fließfähigkeit ist ein ordnungsgemäßer Einbau der prismatischen Probekörper in die Klimakammer, insbesondere im Hinblick auf die notwendige Temperierphase, nicht möglich. Das Verhalten bei hohen Temperaturen wird daher mit dem in Abbildung 5.10.2 dargestellten Probekörper im Wasserbad in einaxialen Zugversuchen untersucht. Die wesentlich geringeren Abmessungen in Kombination mit den im Wasserbad wirkenden Auftriebskräften ermöglichen eine ordnungsgemäße Durchführung der Experimente. Die den Untersuchungen zugrunde liegenden Randbedingungen können Tabelle 5.1.2 entnommen werden.

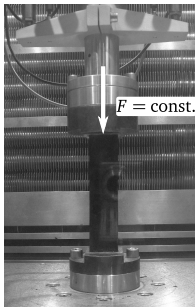


5.10.1: Prismatischer Probekörper

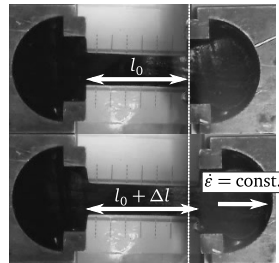


5.10.2: Probekörper „Knochen“

Abbildung 5.10: Probekörperabmessungen



5.11.1: Klimakammer



5.11.2: Wasserbad

Abbildung 5.11: Experimentelle Untersuchung

Die bei den Zugversuchen im Wasserbad auftretenden Verformungen sind teilweise sehr groß, es werden Dehnungen bis zu 100 % und mehr erreicht. Die bei derart großen Dehnungen auftretenden Veränderungen im Querschnitt werden mit einer Kamera aufgezeichnet und bei der Bestimmung der wahren Spannungen σ berücksichtigt. Da die theoretischen Modelle im Rahmen dieser Arbeit kleine Verzerrungen voraussetzen, wird für die Identifikation nur der Anfangsbereich bis zu einer Dehnung von ca. 10 % untersucht.

5.2.2 Kriechversuche

Das Kriechverhalten wird mit kraftgesteuerten Kriechversuchen untersucht. Der Versuchsaufbau und die Probekörperabmessungen entsprechen hierbei denen der weggeregelter Druckversuche in der Klimakammer (Abbildungen 5.10.1 und 5.11.1). Da es aufgrund der wesentlich geringeren Dehnungsgeschwindigkeiten zu keinem Versagen an der Klebestelle kommt, werden die Kriechversuche, wie im ursprünglich entwickelten Versuchsprogramm vorgesehen, mit einer Zugbelastung durchgeführt. Die untersuchten Temperaturen und Kraftniveaus können Tabelle 5.1.2 entnommen werden. Im Anschluß an die Belastungsphase, welche in der Regel auf $4\text{ h} = 14\,400\text{ s}$ angesetzt ist, erfolgt eine Entlastung. Damit kann der Bereich der elastischen Rückverformung und der Anteil der bleibenden Dehnungen identifiziert werden. Im Versuch treten teilweise Schädigungseffekte auf, welche durch einen Wendepunkt in den Versuchskurven gekennzeichnet sind. Diese Bereiche sind bewusst aus der Identifikation ausgeschlossen, da das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell nicht zur Simulation von Schädigungseffekten ausgelegt ist. Die Versuchsdaten liegen jedoch in unmodifizierter Form vor und können im Rahmen weitergehender Untersuchungen zur Identifikation von Schädigungsparametern genutzt werden.

5.2.3 Identifikation der Modellparameter

Die Parameteridentifikation erfolgt nach dem in Abschnitt 4.4.2 vorgestellten Evolutionsverfahren. Die Versuchsdaten sind hierfür in vereinheitlichter Form in die in Abschnitt 4.4.1 beschriebene HDF5-Datenbank überführt. Die Versuche sind für die Identifikation derart aufgearbeitet, dass die für das fraktionale Modell notwendige konstante Zeitschrittweite bereichsweise eingehalten ist. Ein effizientes *Restart*-Schema wird verwendet, um Bereiche mit großen Gradienten bzw. Belastungswechseln mit einer feineren Auflösung berechnen zu können.

5.2.1: Basisparameter

E_{el} [MPa]	ν_{el} [-]	E_{vp} [MPa]	$\dot{\epsilon}_{vp}^0$ [$1/s$]	σ_{vp}^0 [MPa]	n_{vp} [-]	α_{vp} [-]
185,10	0,35	88,30	$5,11 \cdot 10^{-2}$	648,60	1,11	0,72

5.2.2: Parameter der Temperaturabhängigkeit

$W_{E_{el}}$ [$1/^\circ\text{C}$]	$W_{E_{vp}}$ [$1/^\circ\text{C}$]	$W_{\sigma_{vp}^0}^q$ [$1/^\circ\text{C}^2$]	$W_{\sigma_{vp}^0}^l$ [$1/^\circ\text{C}$]
$-3,33 \cdot 10^{-2}$	-0,22	$1,52 \cdot 10^{-3}$	-0,41

Tabelle 5.2: Modellparameter des fraktionalen Maxwell-Modells

Die Identifikation führt zu einem optimalen Satz von Modellparametern, welcher in Tabelle 5.2 dargestellt ist. Die geringe Steifigkeit des Bindemittels spiegelt sich in den

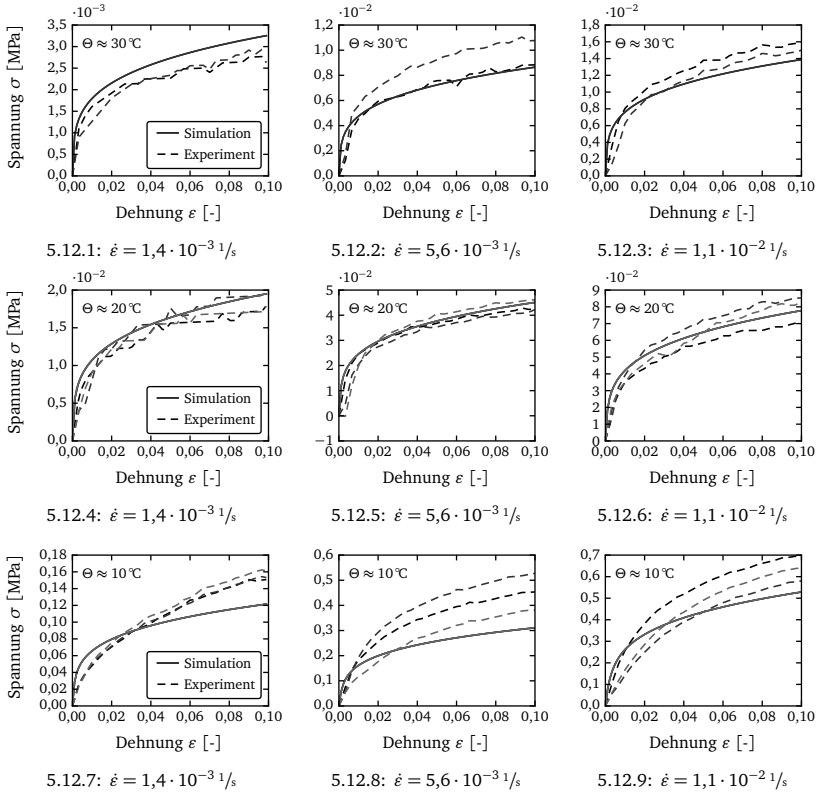


Abbildung 5.12: Zugversuche im Wasserbad für verschiedene Dehnraten $\dot{\epsilon}$ und Temperaturen Θ

kleinen E-Moduli der elastischen Feder und des fraktionalen Elements wider. Mit der Ableitungsordnung $\alpha = 0,72$ bestimmt der viskose Anteil des fraktionalen Elements das Verformungsverhalten. Die Querdehnzahl kann aus einaxialen Versuchen nicht bestimmt werden und wird zunächst mit 0,35 festgelegt. Der Grad der Nichtlinearität des Norton-Ansatzes ist mit 1,11 niedrig. Inwieweit ein linearer Ansatz in Verbindung mit einer fraktionalen Formulierung ausreichend ist, soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert werden. Das Niveau der Bezugsspannung σ_{vp}^0 ist mit 648,6 MPa sehr hoch. Dies kann mit der Wahl der Bezugsdehnrates $\dot{\epsilon}_{vp}^0 \approx 5 \cdot 10^{-3}$ begründet werden. Für weiterführende Untersuchungen sollte die Bezugsdehnrates niedriger angesetzt werden.

Der Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Experimenten zeigt, dass das Ver-

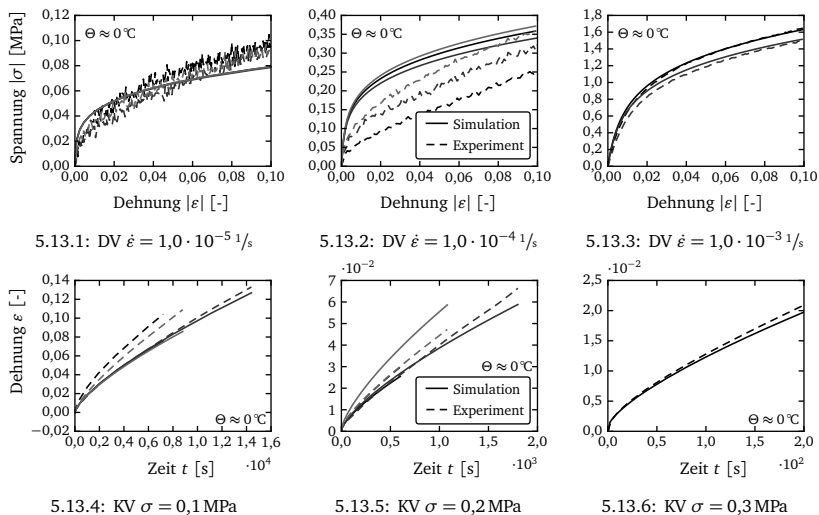


Abbildung 5.13: Druckversuche (DV) und Kriechversuche (KV) in der Klimakammer bei der Temperatur $\Theta \approx 0^\circ\text{C}$

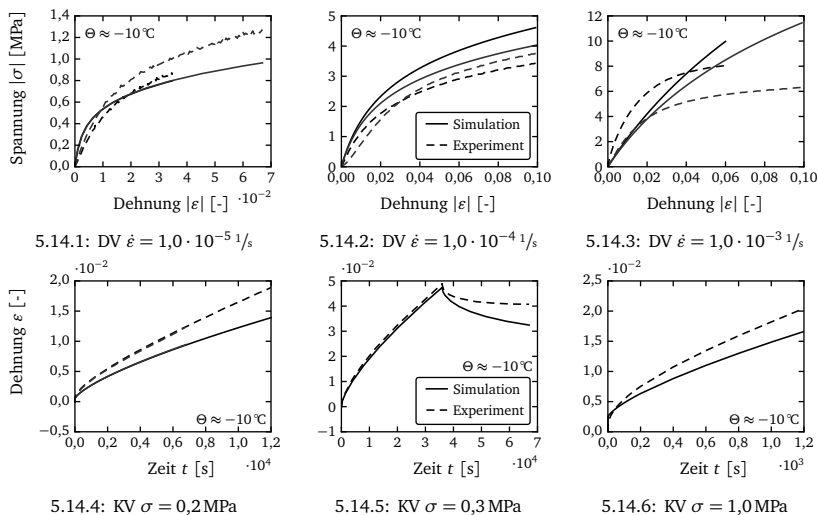


Abbildung 5.14: Druckversuche (DV) und Kriechversuche (KV) in der Klimakammer bei der Temperatur $\Theta \approx -10^\circ\text{C}$

halten des Bindemittels über ein breites Temperatur- und Beanspruchungsspektrum zutreffend wiedergegeben werden kann. Die in Abbildung 5.12 zusammengefassten Versuchsergebnisse der Zugversuche im Wasserbad können durch die Simulation sehr gut sowohl über den Temperaturbereich als auch für die verschiedenen Dehnraten wiedergegeben werden. Besonders gut wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung für die Temperatur 20 °C approximiert. Während die durch die Hooke-Feder maßgeblich repräsentierte Steifigkeit zu Versuchsbeginn für alle Temperaturen ähnlich gut wiedergegeben wird, ist das nichtlineare Kriechverhalten für die Temperatur 10 °C überschätzt.

Abbildung 5.13 stellt die Ergebnisse der Versuche in der Klimakammer bei 0 °C den Simulationsergebnissen gegenüber. Alle Kriechversuche mussten aufgrund eintretender Schädigungseffekte bereits vor Beginn der Entlastungsphase gekürzt werden. Während die verbleibenden Belastungsphasen der Kriechversuche für alle Belastungsstufen hinreichend genau approximiert werden, ist das Identifikationsergebnis für die Druckversuche nur für die in Abbildung 5.13.3 dargestellte Versuchsgruppe mit einer Dehnrate von $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-3} 1/s$ sehr gut. Die schlechteren Ergebnisse für die kleineren Dehnraten können mit dem teilweise extrem verrauschten Messsignal begründet werden, welches sich infolge eines für den Messbereich ungeeigneten Wegaufnehmers eingestellt hat.

In Abbildung 5.14 sind die Ergebnisse der Versuche und Simulationen bei –10 °C zusammengefasst. Die Identifikationsergebnisse für die weggeregelter Druckversuche können unter Berücksichtigung der teilweise sehr großen Streuungen der experimentellen Daten als gut gewertet werden. Auch die Kriechversuche werden hinreichend genau wiedergegeben. Bei dem mit wiederholten Be- und Entlastungsphasen durchgeführten Kriechversuch bei einer Spannung von $\sigma = 0,3 \text{ MPa}$ (Abbildung 5.14.5) wird der elastische Anteil zwar überschätzt, die Anpassung ist dessen ungeachtet sehr gut.

Die in Abbildung 5.15 zusammengefassten Ergebnisse der Versuche und Simulationen bei –20 °C zeigen nur mäßig gute Übereinstimmungen. Die elastischen Anteile der Kriechversuche sind in den Simulationen teilweise stark überschätzt. Die in den Versuchen zu beobachtende Nichtlinearität wird nur unzureichend wiedergegeben. Die schlechtere Anpassung kann zum einen aus dem nicht implementierten Schädigungsansatz resultieren, da gerade im Tieftemperaturbereich das spröde Materialverhalten zu Rissbildungen führen kann. Ebenso kann die Annahme einer rein exponentiellen Temperaturabhängigkeit für den Tieftemperaturbereich unzureichend sein. Eine die Glasübergangstemperatur berücksichtigende Annahme für die Temperaturabhängigkeit im Tieftemperaturbereich, wie sie u. a. von CHEUNG/CEBON [18] vorgeschlagen wird, kann bei zukünftigen Untersuchungen zu einer besseren Approximation des Tieftemperaturverhaltens führen.

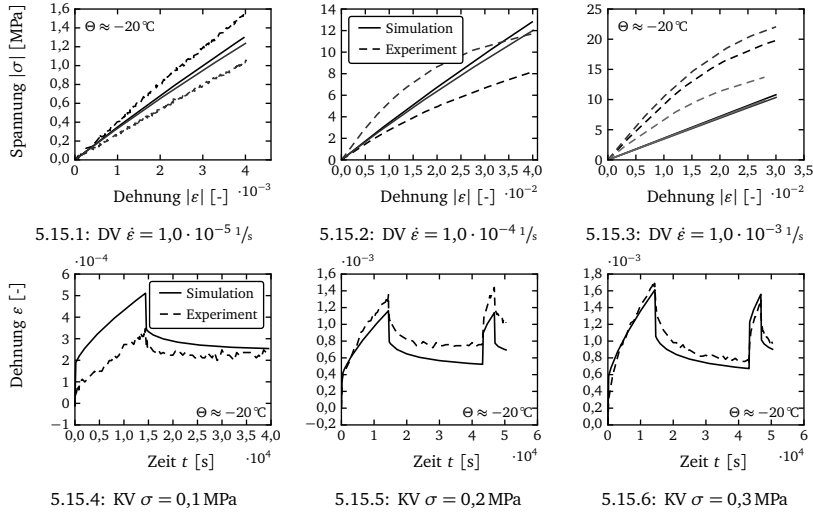


Abbildung 5.15: Druckversuche (DV) und Kriechversuche (KV) in der Klimakammer bei der Temperatur $\Theta \approx -20^\circ\text{C}$

5.3 Mehraxiale Formulierung des fraktionalen Maxwell-Modells

Soll das Trag- und Deformationsverhalten realer Strukturen mit Hilfe numerischer Methoden untersucht werden, müssen die entwickelten Materialgleichungen für die Beschreibung mehraxialer Spannungs- und Verzerrungszustände aufbereitet werden. Für das fraktionale Maxwell-Modell kann unter der Annahme kleiner Verzerrungen die Dehnung additiv in einen elastischen und einen inelastischen bzw. visko-plastischen Anteil aufgeteilt werden,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{vp} . \quad (5.48)$$

Beide Anteile können getrennt voneinander in eine mehraxiale Formulierung überführt werden.

Die Übertragung des elastischen Anteils $\boldsymbol{\varepsilon}_{el}$ kann unter der Annahme isotropen Materialverhaltens mit dem linearen Elastizitätstensor \mathbb{E} vierter Ordnung erfolgen. Dieser ist mit den Lamé-Konstanten λ und μ bzw. über die Steifigkeit E und die Querdehnzahl ν definiert

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.49)$$

und folgt in der Voigt-Schreibweise zu

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & \lambda + 2\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Die inelastischen Verzerrungen sind für das Maxwell-Modell mit den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$ des fraktionalen Elements gegeben. Das mehraxiale Verhalten wird äquivalent zur mehraxialen Formulierung eines klassischen Dämpferelements angesetzt, vgl. GARTUNG [37]. Diese Annahme bedingt die Formulierung einer Spannungs-Verzerrungs-Bedingung für den inelastischen Bereich. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierfür eine assoziierte Fließregel angesetzt, bei der die plastische Potentialfläche und die Fließfläche identisch sind. Die Richtung des visko-plastischen Fließens wird dabei senkrecht zur Fließfläche angenommen.

Legt man die VON MISES-Fließbedingung zugrunde, folgt eine Fließregel, bei der visko-plastisches Fließen proportional zum deviatorischen Spannungstensor stattfindet. Da die zeitliche Änderung der viskosen Dehnung über den fraktionalen Ableitungsoperator definiert ist, folgt die Fließregel unter Verwendung des im Anhang unter (A.11) angegebenen Deviatoroperators \mathbb{D} zu

$$D^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{vp} = D^\alpha \lambda \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.51)$$

Der Proportionalitätsfaktor $D^\alpha \lambda$ kann über eine Arbeitsbetrachtung ermittelt werden, da die fraktionale Rate der volumenbezogenen Arbeit für ein- und mehraxiale Zustände identisch sein muss,

$$D^\alpha A = D^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{vp} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} = D^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^v \cdot \boldsymbol{\sigma}_v. \quad (5.52)$$

Setzt man die Vergleichsspannung nach VON MISES mit

$$\sigma_v = \sqrt{3I_2^D} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.53)$$

an und wertet die Arbeitsbetrachtung mit Hilfe der gegebenen Größen aus, folgt der Proportionalitätsfaktor

$$D^\alpha A = D^\alpha \lambda \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} = D^\alpha \lambda \frac{2}{3} \sigma_v^2 = D^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^v \cdot \boldsymbol{\sigma}_v \quad (5.54)$$

$$\rightarrow D^\alpha \lambda = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_v} D^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^v \cdot \boldsymbol{\sigma}_v. \quad (5.55)$$

Mit Hilfe der eindimensionalen Formulierung für das fraktionale Element des Maxwell-Körpers kann der Proportionalitätsfaktor zu

$$D^\alpha \lambda = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{vp}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0^{n_{vp}}} E_{vp} \sigma_v^{(n_{vp}-1)} \right)^\alpha \quad (5.56)$$

bestimmt werden. Somit folgt für die mehraxiale Formulierung der visko-plastischen Dehnungsanteile

$$D^\alpha \epsilon_{vp} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{vp}} \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0^{n_{vp}}} E_{vp} \sigma_v^{(n_{vp}-1)} \right)^\alpha \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (5.57)$$

Die gegebene Formulierung geht für $\alpha = 1$ in natürlicher Weise in die mehraxiale Formulierung eines nichtlinearen Norton-Dämpfers

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_0}{\sigma_0^{n_{vp}}} \sigma_v^{(n_{vp}-1)} \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad (5.58)$$

über, während sie für $\alpha = 0$ einen dem deviatorischen Anteil einer 3D-Hooke-Formulierung mit $\nu_{vp} = 0.5$ äquivalenten Ausdruck beschreibt,

$$\epsilon_{vp} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_{vp}} \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1 + \nu_{vp}}{E_{vp}} \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (5.59)$$

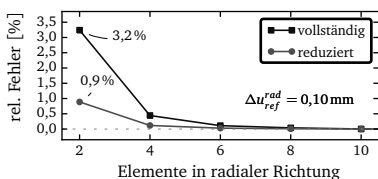
Die gewählte Vergleichshypothese nach VON MISES setzt deviatorisches Fließen voraus. Somit ist die mehraxiale Formulierung in dieser Form für $\alpha = 0$ aufgrund der fehlenden volumetrischen Anteile nicht mit einer mehraxialen Formulierung für die Hooke-Feder identisch. Mit Hilfe der Vergleichsspannungshypothese nach DRUCKER-PRAGER,

$$\sigma_v = \alpha_f I_1 + \sqrt{3 I_2^D} , \quad (5.60)$$

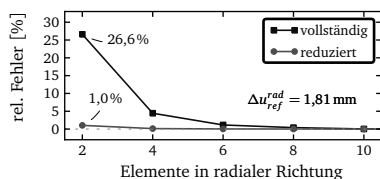
könnte auch volumetrisches Fließen abgebildet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieser Ansatz jedoch nicht weiter verfolgt.

5.4 Reduzierte Integration

Das Materialmodell der Bindemittelkomponente beschreibt viskoses Fließen unter der Voraussetzung volumenkonstanter Verzerrungen. Bei der Simulation des Materialverhaltens mit der Finite-Element-Methode treten daher sowohl volumetrisches Locking als auch Spannungssoszillationen auf, vgl. hierzu Abschnitt 4.2. Mit Hilfe der modifizierten reduzierten Integration können diese Effekte eliminiert werden, wie die folgende Untersuchung zeigt.



5.16.1: Ende der Belastungsphase $t = 1,0$ s



5.16.2: Ende der Kriechphase $t = 200,0$ s

Abbildung 5.16: Vergleich des Approximationsfehlers bei vollständiger und reduzierter Integration für das Materialmodell des Bindemittels

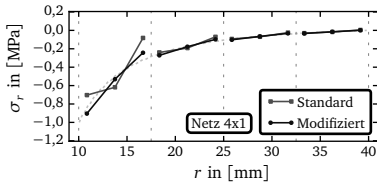
Die in Abbildung 4.2 dargestellte Geometrie ist hierfür mit rotationssymmetrischen 9-Knoten-Elementen diskretisiert. Das Materialverhalten wird durch das vorgestellte fraktionale Modell mit dem ermittelten Parametersatz des Bindemittels beschrieben. Es wird eine Temperatur von 20°C angenommen. Der Innendruck wird innerhalb einer Sekunde linear auf $p = 1,0$ MPa gesteigert. Im Anschluß an diese Belastungsphase erfolgt eine Kriechphase mit konstanter Belastung bis zum Zeitpunkt $t = 200$ s.

Im Gegensatz zu den Untersuchungen in Abschnitt 4.2 kann für das Materialmodell des Bindemittels keine analytische Lösung angegeben werden. Daher werden die Ergebnisse einer Simulation mit feiner Diskretisierung (25 Elemente in radialer Richtung, 8 Elemente in tangentialer Richtung) unter Verwendung der modifizierten reduzierten Integration als Referenz angenommen.

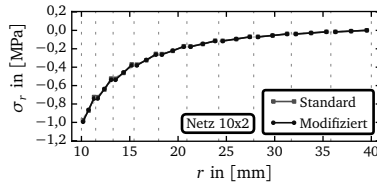
Abbildung 5.16 stellt die Approximationsfehler der Verschiebung an der Innenseite des Zylinders für verschiedene Diskretisierungen dar. Am Ende der Belastungsphase (Abbildung 5.16.1) liegen die Approximationsfehler im Bereich der Ergebnisse für das kompressible, linear elastische Materialverhalten. Dies kann mit den zu diesem Zeitpunkt vorwiegend elastischen Dehnungsanteilen begründet werden. Wie bei der Untersuchung des linear elastischen Materialverhaltens zeigt sich eine bessere Approximation der Verschiebungen bei groben Diskretisierungen, wenn die reduzierte Integration angewendet wird.

Während der Kriechphase steigen die visko-plastischen Dehnungen deutlich an. Da diese bedingt durch die gewählte Materialbeschreibung mit rein volumetrischen Verzerrungen verbunden sind, zeigt sich in Analogie zur Untersuchung des nahezu inkompressiblen linear elastischen Materialverhaltens ein ausgeprägtes volumetrisches Locking. Dadurch werden die Verschiebungen vor allem für grobe Diskretisierungen deutlich unterschätzt. Mit Hilfe der reduzierten Integration können wie im linearen Fall auch für grobe Diskretisierungen sehr gute Verschiebungsapproximationen erreicht werden.

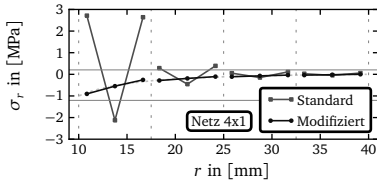
Werden die modifizierten Dehnungen in Kombination mit der reduzierten Integration angewendet, kann auch für das fraktionale Materialmodell die Qualität der



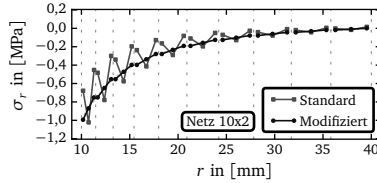
5.17.1: Ende der Belastungsphase – grobes Netz



5.17.2: Ende der Belastungsphase – feines Netz



5.17.3: Ende der Kriechphase – grobes Netz



5.17.4: Ende der Kriechphase – feines Netz

Abbildung 5.17: Vergleich der Radialspannungen für Simulationen mit der Standardmethode der reduzierten Integration und der modifizierten Variante am Materialmodell des Bindemittels

Spannungen wesentlich verbessert werden, vgl. Abbildung 5.17. Am Ende der Belastungsphase werden die Spannungen auch ohne Modifikation hinreichend genau wiedergegeben. Es zeigt sich jedoch bei der groben Diskretisierung (Abbildung 5.17.1), dass die Spannungen bei Anwendung des modifizierten Verfahrens besser approximiert werden.

Infolge der am Ende der Kriechphase maßgeblichen visko-plastischen Dehnungsanteile stellen sich bei der Verwendung der klassischen reduzierten Integration Spannungsoszillationen ein, welche insbesondere bei der groben Diskretisierung erheblich sind. Die mit der modifizierten reduzierten Integration berechneten Spannungen geben dagegen den Spannungsverlauf auch für die grobe Diskretisierung nahezu exakt wieder.

6 Materialmodell der Mineralstoffkomponente

Das Verformungsverhalten und die Gebrauchstauglichkeit von Asphaltmischungen wird maßgeblich durch den mineralischen Zuschlag bestimmt. Der auch unter dem Begriff Gesteinskörnung geführte mineralische Zuschlag gehört als loses Haufwerk zur Gruppe der kohäsionslosen granularen Medien, deren Verformungsverhalten mit Materialmodellen der Hypoplastizität beschrieben werden kann. In diesem Kapitel wird ein derartiges Materialmodell für die Mineralstoffkomponente vorgestellt und die Bestimmung der Modellparameter anhand von Laborversuchen demonstriert. Es lässt sich zeigen, dass die Kombination aus automatischer Differentiation und gedämpftem Newton-Raphson-Verfahren ein effizientes Verfahren zur numerischen Lösung der nichtlinearen Materialgleichungen darstellt.

6.1 Eigenschaften mineralischer Zuschläge

Die mineralischen Zuschläge sind entsprechend der ZTV ASPHALT-STB 07 [114] zusammengesetzte Gesteinskörnungen, welche sich je nach Anforderungsprofil in der Art der Einzelkörner sowie in der Korngrößenverteilung unterscheiden. Im Straßenbau kommen im Allgemeinen gebrochene Kornfraktionen zum Einsatz, da die raue Oberfläche der Einzelkörner zu einem sehr guten Verbund mit dem Bindemittel führt, die verzahnende Wirkung des tragenden Korngerüsts verstärkt und bei Deckschichten eine ausreichende Griffbarkeit der Fahrbahnoberfläche gewährleistet. Die Korngrößenverteilung bestimmt maßgeblich den resultierenden Hohlraumgehalt des verdichteten Asphalts und die Art des Lastabtrags. Für Asphaltbetone werden in der Regel gleichmäßig gestufte Gesteinsmischungen eingesetzt, welche zu einem geringen Hohlraumgehalt und einem gleichmäßigen Lastabtrag über Korn-zu-Korn-Kontakte führen. Die ungleichmäßig gestuften Korngrößenverteilungen der mineralischen Zuschläge für Splittmastixasphalte spiegeln sich in einem größeren Hohlraumgehalt bei einem gleichzeitig höheren Bindemittelbedarf wider. Zudem ist der Lastabtrag bei Splittmastixasphalten durch wenige Korn-zu-Korn-Kontakte geprägt, was besondere Anforderungen an die Qualität der verwendeten Gesteinskörnung stellt.

Die im Straßenbau eingesetzten Gesteinsmischungen können der Gruppe der granularen Medien zugeordnet werden. Die wesentlichen Unterschiede zwischen dem Materialverhalten granularer Medien und dem Verhalten metallischer Werkstoffe

stellt LADE [73] umfassend dar. Auf Basis dieser Arbeit fasst FEISE [34] die fünf Hauptmerkmale des mechanischen Verhaltens von granularen Medien zusammen:

- Plastizität** Granulare Medien zeigen ein nahezu ideal plastisches Materialverhalten. Die elastischen Verformungsanteile sind derart klein, dass sie kaum messbar sind.
- Barotropie** Das Verformungsverhalten granularer Medien hängt maßgeblich vom vorliegenden Spannungsniveau ab.
- Dilatanz** Granulare Medien ändern bei der Verformung ihre Dichte, auch wenn sich der hydrostatische Spannungsanteil nicht ändert.
- Pyknotropie** Das mechanische Verhalten granularer Medien hängt vom vorliegenden Dichtezustand ab.
- Kohäsion** Granulare Medien können im Allgemeinen keine Zugspannungen übertragen. Dies führt dazu, dass bei derartigen kohäsionslosen Materialien das Haufwerk bei Zugbeanspruchung zerfällt. Können Zugspannungen aufgenommen werden, spricht man von kohäsiven granularen Medien. Die Zugfestigkeit solcher Materialien ist jedoch wesentlich kleiner als ihre Druckfestigkeit.

Das gesamte Spektrum des Materialverhaltens granularer Medien kann mit Materialmodellen der Hypoplastizität beschrieben werden.

6.2 Materialmodell für hypoplastisches Materialverhalten

Materialmodelle der Hypoplastizität sind inkrementell nichtlinear formulierte Materialmodelle, welche plastisches Verformungsverhalten beschreiben können, ohne die aus der klassischen Plastizitätstheorie bekannten Potential- oder Schaltfunktionen zu verwenden. Bei Modellen für hypoplastisches Materialverhalten werden plastische Verformungen von Belastungsbeginn an berücksichtigt.

Die Entwicklung dieser Stoffmodelle wurde maßgebend durch zwei Forschergruppen vorangetrieben: in Grenoble durch DARVE und CHAMBON [21, 17] sowie in Karlsruhe durch GUDEHUS und KOLYMBAS [41, 59, 43, 60]. Erste Versionen der Materialmodelle für hypoplastisches Materialverhalten, wie z. B. von KOLYMBAS [58], sind von komplizierten Tensorfunktionen mit physikalisch schwer zu interpretierenden Modellparametern geprägt. Aktuelle Modellansätze, welche z. B. von BAUER [7], WU [112] oder von WOLFFERSDORFF [110] vorgeschlagen werden, beschreiben die vielfältigen Aspekte des Verformungsverhaltens granularer Medien mit Hilfe wesentlich einfacherer Tensorgleichungen und auf Basis von Modellparametern, welche

physikalischen Phänomenen zugeordnet werden können. Einen detaillierten Überblick über die historische Entwicklung hypoplastischer Materialmodelle und deren Modellierungsansätze gibt KOLYMBAS [61].

Die Anwendung von Materialmodellen der Hypoplastizität ist möglich, wenn die Einzelkörner ein einfaches granulares Skelett bilden, das durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist:

- Der aktuelle Zustand des granularen Materials ist allein durch die Korngerüstspannung σ und den Porenraum e charakterisiert.
- Die Einzelkörner sind permanent, d. h. sie ändern im Verlauf des Deformationsprozesses weder ihre Form noch ihre Größe.
- Die Verformung des Korngerüsts beruht allein auf der Umordnung der Einzelkörner, also auf einer Änderung der relativen Verschiebungen der Einzelkörner und einer Evolution des Korn-zu-Korn-Kontaktes. Kornbruch, Kornkompression oder Abrasionseffekte können nicht beschrieben werden.
- Es treten keine Oberflächeneffekte wie Kapillarität oder Zementbrückenbildung auf.
- Homogene Randbedingungen resultieren in homogenen Deformationszuständen, d. h. es treten keine Effekte wie Schublokalisierung o. ä. auf.
- Rateneffekte sind vernachlässigbar klein.

Mineralische Zuschläge und insbesondere die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Mineralstoffgemische aus gebrochenem Gabbro erfüllen diese Eigenschaften. Somit kann das Verformungsverhalten der Mineralstoffkomponente mit Hilfe eines hypoplastischen Materialmodells beschrieben werden.

6.2.1 Materialmodell nach VON WOLFFERSDORFF

Ein geeignetes Modell für die Beschreibung des Verformungsverhaltens kohäsionsloser mineralischer Zuschläge ist das Materialmodell von VON WOLFFERSDORFF [110]. Es zeichnet sich durch einen Satz von Modellparametern aus, welche besonders effizient anhand von Standardversuchen der Bodenmechanik ermittelt werden können. Das Modell wird in zahlreichen Arbeiten erfolgreich angewendet, so benutzt etwa NIEMUNIS [85] das Modell für seine Habilitationsschrift als Referenzmodell. Die Eignung zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Schüttgütern demonstriert BÖHRNSEN [10]. ASCHENBRENNER [4] und HOLLER [50] zeigen, dass das Modell erfolgreich in Mehrkomponentenmodelle integriert werden kann.

Das Materialverhalten der Mineralstoffkomponente kann mit dem Materialmodell nach VON WOLFFERSDORFF über acht Modellparameter beschrieben werden, welche

im Folgenden kurz vorgestellt werden. Eine detailliertere Beschreibung der physikalischen Bedeutung der Modellparameter kann der Dissertation von HERLE [48] entnommen werden.

Der *kritische Reibungswinkel* φ_c ist maßgeblich von der Kornform und der Korngrößenverteilung abhängig. Die *Grenzporenzahlen* e_{i0} , e_{c0} sowie e_{d0} entsprechen den charakteristischen Porenzahlen e_i , e_c und e_d bei verschwindendem Korndruck. Der Exponent n ist ebenfalls ein von den Korneigenschaften abhängiger Parameter, welcher die Druckabhängigkeit des Kompressionsverhaltens steuert.

Die *Granulathärte* h_s wird als einzige dimensionsbehaftete Größe des Materialmodells maßgeblich durch das Kornmaterial, die Form der Körner und die Korngrößenverteilung beeinflusst. Sie stellt einen von der Dichte unabhängigen Referenzdruck dar und kann als eine Art Kompressionskennwert gedeutet werden. Da sowohl die Bezeichnung als auch die Einheit von h_s vermuten lassen, es handele sich bei der Granulathärte um die Steifigkeit der Einzelkörner, soll an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die Granulathärte **nicht** die Festigkeit der Einzelkörner beschreibt, sondern einen Kompressionsbeiwert darstellt.

Der Exponent α beeinflusst die Wirkung der Lagerungsdichte auf die Scherfestigkeit, während der Exponent β den Einfluss der Dichte und des Druckniveaus auf das Materialverhalten berücksichtigt.

Das Materialmodell nach VON WOLFFERSDORFF verknüpft den Cauchy-Spannungstensor \mathbf{T} der Korngerüstspannungen mit der Dehnrate \mathbf{D}

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbb{L} : \mathbf{D} + \mathbf{N} \cdot \|\mathbf{D}\| . \quad (6.1)$$

Die zeitliche Änderung der Spannungen ist mit der objektiven Jaumann-Rate über

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} \quad (6.2)$$

beschrieben. Hierbei stellt $\dot{\mathbf{T}}$ die Zeitableitung der Spannung und der Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W}

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \underline{\mathbf{v}} - \text{grad } {}^T \underline{\mathbf{v}} \right) \quad (6.3)$$

den asymmetrischen Anteil des Deformationsgeschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L} = \text{grad } \underline{\mathbf{v}}$ dar.

Der Beschreibungsumfang des Mehrkomponentenmodells ist aufgrund der gewählten Formulierung des Materialmodells für die Bindemittelkomponente auf die Beschreibung kleiner Verzerrungen beschränkt. Daher ist es angemessen, bereits an dieser Stelle die entsprechenden Vereinfachungen einzuführen. Die Jaumann-Rate für den Cauchy-Spannungstensor der Mineralstoffkomponente kann mit der Zeitableitung der Spannungen σ^m

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W} \stackrel{!}{=} \dot{\sigma}^m \quad (6.4)$$

approximiert werden. Der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} ist im Rahmen einer linearen Kinematik äquivalent zur Zeitableitung der linearen Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \stackrel{!}{=} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (6.5)$$

Die auf kleine Verzerrungen reduzierte Form der Tensorgleichung nach VON WOLFFERSDORFF folgt daher zu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{N} \cdot \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|. \quad (6.6)$$

Hierbei beschreibt der vierstufige Tensor \mathbb{L}

$$\mathbb{L} = f_b f_e \frac{1}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m} \left(F^2 \mathbb{I} + a^2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m \right) \quad (6.7)$$

die lineare Beziehung zwischen Dehnungs- und Spannungsinkrement. Der zweistufige Tensor \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = f_d f_b f_e \frac{Fa}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m + \mathbb{D} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m) \quad (6.8)$$

repräsentiert den im Bezug auf die Dehnungen nichtlinearen Anteil von (6.6), da die Norm der Dehnungen mit

$$\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\| = \sqrt{\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^2} \quad (6.9)$$

gegeben ist. Mit Hilfe der volumetrischen Dehnungen kann man die Entwicklung der Porenzahl unter der Annahme inkompressibler Einzelkörner mit der Evolutionsgleichung

$$\dot{e} = (1 + e) \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.10)$$

beschreiben.

Die Tensoren \mathbb{L} und \mathbf{N} sind maßgeblich von der auf das Druckniveau bezogenen Korngerüstspannung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m$ abhängig, welche als dimensionslose Größe über

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \frac{\boldsymbol{\sigma}^m}{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^m} \quad (6.11)$$

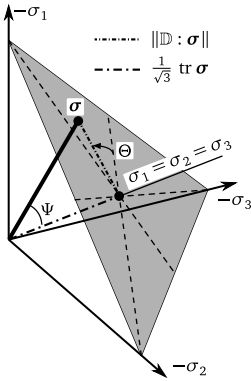
definiert und koaxial zur Korngerüstspannung $\boldsymbol{\sigma}^m$ ist.

Der Parameter a

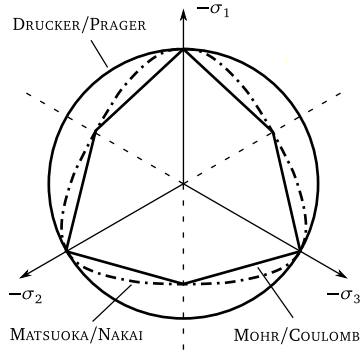
$$a = \frac{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c} \quad (6.12)$$

stellt eine in Abhängigkeit vom kritischen Reibungswinkel φ_c gegebene Materialkonstante dar. Die in Abbildung 6.1.1 dargestellten und über

$$\tan \Psi = \sqrt{3} \|\mathbb{D} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m\| \quad \text{und} \quad \cos 3\Theta = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}((\mathbb{D} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m)^3)}{[(\mathbb{D} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m) : (\mathbb{D} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m)]^{\frac{3}{2}}} \quad (6.13)$$



6.1.1: Winkeldefinitionen



6.1.2: Fließflächen

Abbildung 6.1: Definition der Winkel Ψ und Θ sowie Fließflächen im Vergleich

definierten Winkel Ψ und Θ repräsentieren die Lage des aktuellen Spannungszustands im Spannungsraum. Über diese Winkel ist die Spannungsfunktion F mit

$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \Psi + \frac{2 - \tan^2 \Psi}{2 + \sqrt{2} \tan \Psi \cos 3\Theta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \Psi \quad (6.14)$$

formuliert, so dass in Grenzzuständen die Fließbedingung nach MATSUOKA/NAKAI [81]

$$f_{MN} = -\frac{I_1(\sigma^m) I_2(\sigma^m)}{I_3(\sigma^m)} - \frac{9 - \sin^2 \varphi_c}{1 - \sin^2 \varphi_c} \quad (6.15)$$

eingehalten wird. Die Fließfläche ist in Abbildung 6.1.2 im Vergleich zu den bekannten Fließflächen nach MOHR/COULOMB [20] und DRUCKER/PRAGER [32] dargestellt.

Die Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Dichte (Pyknotropie) und vom Druck (Barotropie) wird über die skalaren Faktoren f_e , f_d und f_b beschrieben, welche mit Hilfe der von GUDEHUS [42] eingeführten charakteristischen Porenzahlen e_i , e_c und e_d definiert werden können. Die Porenzahlen besitzen folgende Eigenschaften:

- e_i beschreibt die größtmögliche Porenzahl eines Korngerüsts bei lockerster isotroper Lagerung.
- e_c beschreibt die Grenzporenzahl im kritischen Zustand.
- e_d beschreibt die Porenzahl bei größtmöglicher Verdichtung, welche in der Regel bei zyklischer Scherung erreicht wird.

Für die charakteristischen Porenzahlen wird im Modell davon ausgegangen, dass sie affin zueinander mit dem mittleren Druck abnehmen. Es gilt

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[- \left(\frac{-\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{h_s} \right)^n \right] \quad (6.16)$$

mit den Grenzporenzahlen e_{i0} , e_{c0} und e_{d0} . Die Granulathärte h_s und der Exponent n stellen von den granulometrischen Eigenschaften des Korngerüsts abhängige Modellparameter dar. Mit Hilfe der charakteristischen Porenzahlen können die Barotropie- und Pyknotropiefaktoren

$$f_e = \left(\frac{e_c}{e} \right)^\beta \quad \text{und} \quad f_d = \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha \quad (6.17)$$

angegeben werden. Der Barotropiefaktor

$$f_b = \left(\frac{e_{i0}}{e_{c0}} \right)^\beta \frac{h_s}{n} \frac{1 + e_i}{e_i} \left(\frac{-\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{h_s} \right)^{1-n} \left[3 + \alpha^2 - \alpha \sqrt{3} \left(\frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \right]^{-1} \quad (6.18)$$

folgt aus der Forderung, dass der Druckzustand für eine isotrope Kompression aus der lockersten Lagerung heraus der Kompressionsbedingung (6.16) entsprechen muss.

6.2.2 Konzept der intergranularen Dehnung

Die Identifikation der Modellparameter führt zu Parametersätzen, mit denen die Beanspruchungspfade des Ödometerversuchs in der Simulation sehr gut approximiert werden können. Es zeigt sich jedoch, dass unter Berücksichtigung des Ent- und Wiederbelastungspfads das experimentell beobachtete Materialverhalten nur unzureichend wiedergeben wird. Der in Abbildung 6.2 dargestellte Vergleich von Simulation und experimentellen Ergebnissen zeigt Abweichungen im Wiederbelastungspfad. Die Simulation weist im Gegensatz zum Experiment zunehmende Verformungen auf.

Dieses vor allem bei zyklischer Belastung auftretende Phänomen wird als *Ratcheting* bezeichnet und stellt einen entscheidenden Nachteil der Formulierung nach VON WOLFFERSDORFF dar. Das von NIEMUNIS/HERLE [85] eingeführte Konzept der intergranularen Dehnungen stellt eine Erweiterung des klassischen Modells dar, mit deren Hilfe das Auftreten von Ratcheting-Effekten bei zyklischer Belastung wirkungsvoll verhindert werden kann. Im folgenden Abschnitt werden die notwendigen Erweiterungen vorgestellt.

Das Konzept der intergranularen Dehnungen unterstellt, dass sich die Dehnungsantwort einer Mineralstoffprobe zum einen aus der Verformung einer intergranularen Grenzschicht und zum anderen aus der Verformung infolge der Neuordnung des Korngerüsts zusammensetzt. Die intergranulare Grenzschicht kann hierbei als ein

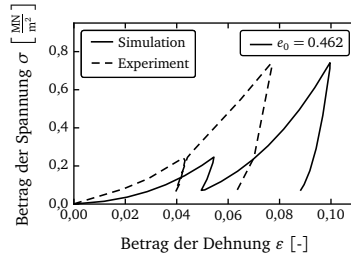
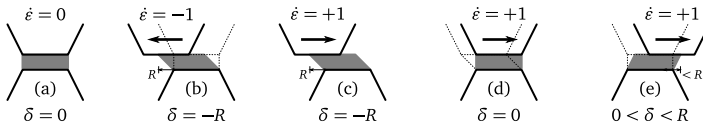
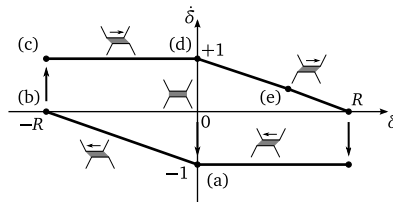


Abbildung 6.2: Ratcheting-Effekt beim klassischen Modell nach VON WOLFFERSDORFF

elastischer „Puck“ zwischen den Körnern gedeutet werden, dessen Verformungszustand über die intergranularen Dehnungen δ definiert ist. Änderungen in der Richtung der Gesamtdehnungen ε resultieren zunächst in einer Verformung des Pucks, solange bis dieser eine bestimmte Grenzdehnung erreicht hat. Danach ist das Materialverhalten analog zum klassischen Modell wieder durch Kornumlagerungen bestimmt.



6.3.1: Interpretation der intergranularen Dehnung als „Puck“



6.3.2: Beispielhafte Entwicklung der intergranularen Dehnung δ

Abbildung 6.3: Anschauliche Interpretation der intergranularen Dehnung

Das Verformungsverhalten der intergranularen Grenzschicht lässt sich anschaulich anhand des in Abbildung 6.3 dargestellten Belastungskreislaufs erläutern. Aus der Ruhelage (a) wird die Dehnrate auf einen Wert von $\dot{\varepsilon} = -1$ angehoben. Die gesamte Deformation ergibt sich aus beginnenden Kornumlagerungen und der Verformung der Grenzschicht bis die intergranulare Dehnung den Grenzwert R im Punkt (b) erreicht hat. Analog zum klassischen Modell nach VON WOLFFERSDORFF führt jede weitere Verformung bei einer gleichbleibenden Belastungsrichtung zu Verformungen

infolge von Kornumlagerungen. Eine Umkehr der Belastungsrichtung mit einem zugehörigen $\dot{\varepsilon} = +1$ im Punkt (c) führt dazu, dass sich zunächst allein die intergranulare Grenzschicht verformt und zwar solange, bis die intergranularen Dehnungen den Wert $\delta = 0$ im Punkt (d) angenommen haben. Im weiteren Verlauf setzt sich die Verformung wieder aus einer Kombination von Kornumlagerungen und der Verformung der intergranularen Grenzschicht zusammen, bis der Grenzwert $\delta = R$ auch für diese Belastungsrichtung erreicht ist.

Auf Basis der eindimensionalen Interpretation der intergranularen Dehnungen definieren NIEMUNIS/HERLE den zweistufigen Tensor der intergranularen Dehnungen $\hat{\delta}^m$. Über die Richtung

$$\hat{\delta}^m = \begin{cases} \frac{\delta^m}{\|\delta^m\|} & \text{für } \delta^m \neq 0 \\ 0 & \text{für } \delta^m = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

sowie den normierten Betrag

$$\rho = \frac{\|\delta^m\|}{R} \quad (6.20)$$

der intergranularen Dehnungen ist der aktuelle Zustand der intergranularen Grenzschicht äquivalent zum eindimensionalen Fall gegeben. Die Rate der Korngerüstspannungen ist über

$$\dot{\sigma}^m = \mathbb{M} : \dot{\varepsilon}^{ges} \quad (6.21)$$

definiert, wobei für den vierstufigen Tensor \mathbb{M} verschiedene Grenzfälle angegeben werden können:

- (i) Im Falle einer monotonen Dehnung ohne Richtungsänderung stellt sich nach Verlassen des initialen Bereichs die Spannungsrate des klassischen Modells mit

$$\mathbb{M} = \mathbb{L} + N \hat{\delta}^m \quad (6.22)$$

ein.

- (ii) Für eine vollständige Dehnungsumkehr wird ein elastischer Verbund auf der Mikroebene angenommen und es gilt

$$\mathbb{M} = m_R \mathbb{L} . \quad (6.23)$$

Hierbei charakterisiert der Modellparameter $m_R > 1,0$ die erhöhte Steifigkeit der Grenzschicht.

- (iii) Für eine neutrale Änderung der Dehnungsrichtung um 90° wird

$$\mathbb{M} = m_T \mathbb{L} \quad (6.24)$$

angesetzt, wobei für den Modellparameter $m_R > m_T > 1,0$ gilt.

(iv) Für eine initiale Belastung aus dem neutralen Zustand $\rho = 0$ ist

$$\mathbb{M} = m_R \mathbb{L}$$

äquivalent zu (6.23) angesetzt, was einer richtungsunabhängigen Erhöhung der Anfangssteifigkeit entspricht.

Fasst man diese vier Grenzfälle zusammen, folgt der Tensor \mathbb{M} zu

$$\begin{aligned} \mathbb{M} = & [\rho^\chi m_T + (1 - \rho^\chi) m_R] \mathbb{L} \\ & + \begin{cases} \rho^\chi (1 - m_T) \mathbb{L} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m + \rho^\chi \mathbf{N} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m & \text{für } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ges} > 0 \\ \rho^\chi (m_R - m_T) \mathbb{L} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m & \text{für } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ges} \leq 0. \end{cases} \quad (6.25) \end{aligned}$$

Hierbei wird der Übergang zwischen den Grenzfällen mit Hilfe des Modellparameters χ über den Wichtungsfaktors ρ^χ geglättet. Die Entwicklungsgleichung für die intergranularen Dehnungen definieren NIEMUNIS/HERLE mit

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \begin{cases} \left(\mathbb{I} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m \rho^{\beta_R} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ges} & \text{für } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ges} > 0 \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ges} & \text{für } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^m : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ges} \leq 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

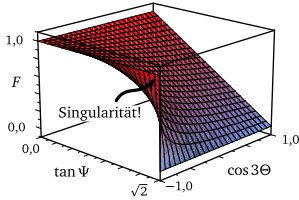
Ein detaillierter Überblick zur Herleitung des erweiterten Modells ist neben der Veröffentlichung von NIEMUNIS/HERLE [85] in NIEMUNIS [84] zu finden.

Aus der beschriebenen Erweiterung resultieren fünf zusätzliche Modellparameter. Der Aktionsbereich der intergranularen Dehnung R ist abhängig von der Struktur des Korngerüsts und entspricht dem Dehnungsbereich, in welchem die Steifigkeit aufgrund einer Dehnungsumkehr nahezu konstant bleibt. Der Parameter m_R charakterisiert sowohl die zunehmende Steifigkeit infolge einer Dehnungsumkehr um 180° als auch die erhöhte initiale Steifigkeit bei Beanspruchungen aus der Ruhelage heraus. Der Parameter m_T skaliert die Steifigkeit für einen Richtungswechsel um 90° . Der Parameter χ geht als Exponent der Größe ρ in die Gleichung (6.25) zur Bestimmung von \mathbb{M} ein. Er steuert den Übergangsbereich zwischen den verschiedenen Steifigkeiten. Der Parameter β_r bestimmt die Entwicklung der intergranularen Dehnungen.

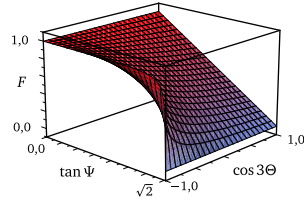
NIEMUNIS/HERLE geben Möglichkeiten zur Bestimmung der zusätzlichen Parameter an, die mit Hilfe aufwendiger zyklischer Ödometer- und Scherversuche sowie mit Hilfe von Nomogrammen ermittelt werden können.

6.2.3 Modifikation der Spannungsfunktion F

Die Spannungsfunktion F des Materialmodells der Mineralstoffkomponente ist für die in kohäsionslosen Böden auftretenden Spannungszustände ausgelegt. Ihr Verlauf ist für den Wertebereich $0 \leq \tan \Psi \leq \sqrt{2}$ und $-1 \leq \cos 3\Theta \leq 1$ in Abbildung 6.4 dargestellt.



6.4.1: Spannungsfunktion nach von WOLFFERDORFF [110]



6.4.2: Modifizierte Spannungsfunktion

Abbildung 6.4: Verlauf der Spannungsfunktion F für den relevanten Wertebereich

Im Verbundmodell sind aufgrund der Verbundwirkung Spannungszustände möglich, bei denen der gegebene Wertebereich von $\tan \Psi \leq \sqrt{2}$ nicht eingehalten wird. Da die Spannungsfunktion für Werte $\tan \Psi > \sqrt{2}$ singulär ist, werden Werte größer $\sqrt{2}$ auf den Grenzwert gesetzt, womit sich $F = 0$ ergibt. Der Grenzwert $\tan \Psi = \sqrt{2}$ entspricht einem Winkel von $54,74^\circ$, was für $\cos 3\Theta = -1$ einer Lage des Spannungspunkts auf einer der Spannungssachsen entspricht. Während dieser Zustand, der einem einaxialen Druck ohne seitliche Dehnungsbehinderung entspricht, in kohäsionslosen Böden nicht vorkommt, sind derartige Spannungszustände im Verbundmodell nicht ausgeschlossen. Für $\cos 3\Theta = -1$ ist die Spannungsfunktion singulär, da sich $F = 1$ unabhängig vom Winkel Ψ einstellt, vgl. Abbildung 6.4.1. Da diese Singularität im Rahmen von Strukturanalysen mit der Finite-Element-Methode zu erheblichen Konvergenzproblemen führt, wird die Spannungsfunktion F im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe des Parameters γ modifiziert,

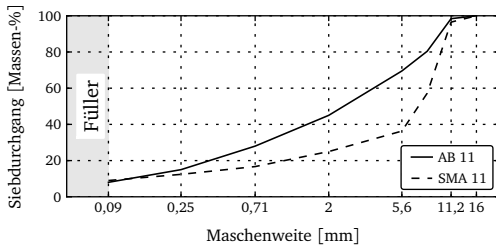
$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \Psi + \frac{2 - \tan^2 \Psi}{2 + \sqrt{2} \tan \Psi \cos 3\Theta} \gamma} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \Psi. \quad (6.27)$$

Wird der Modifikationsparameter zu $\gamma = 0,99$ gewählt, ergibt sich der in Abbildung 6.4.2 dargestellte Verlauf der Spannungsfunktion F ohne Singularität. Die Anwendung der modifizierten Spannungsfunktion F verbessert das Konvergenzverhalten maßgeblich.

6.3 Identifikationsergebnisse und Modellparameter

Ein entscheidender Vorteil des Materialmodells nach VON WOLFFERSDORFF ist, dass die Bestimmung der Modellparameter mit Hilfe von Standardlaborversuchen der Bodenmechanik möglich ist. Für zwei ausgewählte mineralische Zuschläge werden die notwendigen experimentellen Untersuchungen am Institut für Grundbau und Bodenmechanik (IGB) der TU Braunschweig durchgeführt. Die Auswahl der untersuchten Zuschläge basiert hierbei auf den in Abschnitt 7.1 festgelegten Mischungsrezepturen für den Asphaltbeton AB 11 sowie den Splittmastixasphalt SMA 11. Beide mineralischen Zuschläge bestehen aus gebrochenem Gabbro, wobei die abgestufte (gleichmäßige) Körnung des AB 11 einer Ausfallkörnung mit einem hohen Anteil grober Körner für den SMA 11 gegenübersteht. Die entsprechenden Korngrößenverteilungen können den in Abbildung 6.5.1 dargestellten Sieblinien entnommen werden.

Da der Füller im Mehrkomponentenmodell dem Bindemittel zugeschlagen wird, ist der Feinstkornanteil nicht in den bodenmechanisch untersuchten Proben enthalten. Im weiteren Verlauf werden die mineralischen Zuschläge des Asphaltbetons mit AB 11, die des Splittmastixasphalts mit SMA 11 bezeichnet.



6.5.1: Sieblinien



6.5.2: Schüttkegelversuch

Abbildung 6.5: Sieblinien der untersuchten Mineralstoffgemische und systematischer Aufbau des Schüttkegelversuchs

Einen detaillierten Überblick über die zur Bestimmung der Modellparameter notwendigen experimentellen Untersuchungen geben HERLE/GUDEHUS [49]. Nachfolgend werden die zur Bestimmung der Parameter verwendeten Versuche vorgestellt. Darüber hinaus wird erläutert, welche Parameter aus den entsprechenden Versuchsergebnissen gewonnen werden können.

Schüttkegelversuch: Der kritische Reibungswinkel φ_c kann für kohäsionslose granulare Medien mit Hilfe des in Abbildung 6.5.2 dargestellten Schüttkegelversuchs

ermittelt werden. Hierzu wird das Granulat in ein auf dem Boden stehendes Rohr mit einem Durchmesser von 7 cm und einer Länge 120 cm gefüllt. Anschliessend wird das Rohr kontrolliert nach oben gezogen, so dass der Mineralstoff ungestört ausfließen kann. Hierbei wird der Winkel φ_c am fließenden Granulat, also im kritischen Zustand, gemessen.

Rütteltischversuch: Der Rütteltischversuch nach DIN 18126 [28] dient zur Bestimmung der Porenzahlen e_{max} bei lockerster und e_{min} dichtester Lagerung nichtbindiger Böden. Diese Porenzahlen können zur Abschätzung der Modellparameter e_{i0} , e_{c0} sowie e_{d0} verwendet werden. Entsprechend der detaillierten Untersuchungen von HERLE/GUDEHUS können für grobkörnige, nichtbindige Mineralstoffgemische die Modellparameter für die Grenzporenzahlen mit

$$e_{i0} \approx 1,15 \cdot e_{max}, \quad e_{c0} \approx e_{max} \quad \text{und} \quad e_{d0} \approx e_{min} \quad (6.28)$$

hinreichend genau abgeschätzt werden.

Ödometerversuch: Der auch als Ödometerversuch bezeichnete einaxiale Kompressionsversuch nach DIN 18135 [29] dient als Standardversuch der Bodenmechanik zur Bestimmung des Konsolidationsverhaltens von Böden. Mit ihm können sowohl der zeitliche Verlauf der axialen Zusammendrückbarkeit als auch das Schwellverhalten unter seitlicher Dehnungsbehinderung bei stufenweiser Laständerung untersucht werden.

HERLE/GUDEHUS nutzen die Kompressionskurve des Ödometerversuchs an einer anfangs lockeren Probe, um anhand analytischer Überlegungen die Granulathärte h_s und den Exponenten n zu bestimmen. Hierbei ist h_s über die Steigung der Kompressionskurve in der halblogarithmischen Darstellung gegeben, während n die Krümmung der Kurve repräsentiert. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Auswertung jedoch nicht analytisch, vielmehr werden die zur Identifikation der Modellparameter der Bitumenkomponente erfolgreich angewendeten Identifikationsstrategien auch zur Identifikation der Parameter h_s und n angewendet. Dieses Identifikationsverfahren wird auch zur Bestimmung der Parameter α und β angewendet, welche von HERLE/GUDEHUS über Nomogramme bestimmt werden.

Die Kombination aus einer numerischen Identifikationsstrategie und einer Anpassung „von Hand“ führt zu Modellparametern, welche in den Tabellen 6.1 und 6.2 zusammengefasst sind. Die Parameter des klassischen Modells werden hierfür mit Hilfe des vollständigen und zur Bestimmung notwendigen Versuchsprogramms ermittelt. Aufgrund fehlender zyklischer Versuche werden die Parameter des erweiterten Modells allein über eine numerische Anpassung am Ödometerversuch ermittelt. Da in diesem Versuch keine Änderung der Belastungsrichtung um 90° stattfindet, kann der

6.1.1: Klassisches Modell nach VON WOLFFERSDORFF

φ_c [°]	h_s [MPa]	n [-]	e_{d0} [-]	e_{c0} [-]	e_{i0} [-]	α [-]	β [-]
36,27	16,72	0,39	0,22	0,50	0,57	0,43	0,99

6.1.2: Erweiterung um intergranulare Dehnungen

R [-]	m_T [-]	m_R [-]	β_r [-]	χ [-]
$4,14 \cdot 10^{-3}$	1,13	1,54	1,64	2,47

Tabelle 6.1: Modellparameter für das Mineralstoffgemisch AB 11

Parameter m_T nicht direkt bestimmt werden. Er wird über die von NIEMUNIS/HERLE [85] angegebenen Parameter $\tilde{m}_R = 5,0$ und $\tilde{m}_T = 2,0$ mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\tilde{m}_T - 1}{\tilde{m}_R - 1} = \frac{m_T - 1}{m_R - 1} \rightarrow m_T = \frac{\tilde{m}_T - 1}{\tilde{m}_R - 1} (m_R - 1) + 1 \quad (6.29)$$

abgeschätzt. Gleichung (6.29) liegt die Annahme zugrunde, dass $m_T > 1,0$ in jedem Fall eingehalten werden muss. Für genauere Analysen sollten jedoch die zur Bestimmung des erweiterten Parametersatzes notwendigen experimentellen Untersuchungen durchgeführt werden.

Die Parametersätze für das klassische Modell stimmen qualitativ mit den Ergebnissen von ASCHENBRENNER [4] überein, welcher ebenfalls ein Mineralstoffgemisch aus gebrochenem Gabbro untersucht. Die Größe der kritischen Reibungswinkel φ_c liegt im charakteristischen Bereich von Kiesgemischen. Der kleinere Wert für das Gemisch SMA 11 lässt auf eine geringere Scherfestigkeit schließen. Die Granulathärte h_s ist im Vergleich zu Sanden sehr gering. Dies kann entsprechend HERLE [48] mit der Scharfkantigkeit der Körner des gebrochenen Gabbro und der höheren Ungleichförmigkeit der Korngrößenverteilung begründet werden. Diese Aussage bestätigt sich auch beim Vergleich der Gemische AB 11 und SMA 11. Die geringe Granulathärte für den SMA 11 folgt aus seiner ungleichmäßigeren Sieblinie.

6.2.1: Klassisches Modell nach VON WOLFFERSDORFF

φ_c [°]	h_s [MPa]	n [-]	e_{d0} [-]	e_{c0} [-]	e_{i0} [-]	α [-]	β [-]
33,40	22,34	0,59	0,34	0,59	0,67	0,17	0,86

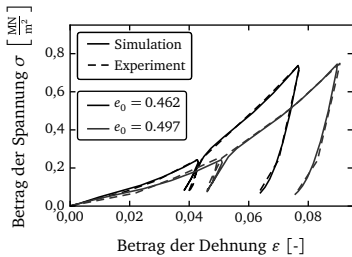
6.2.2: Erweiterung um intergranulare Dehnungen

R [-]	m_T [-]	m_R [-]	β_r [-]	χ [-]
$2,34 \cdot 10^{-3}$	1,13	1,51	2,90	3,09

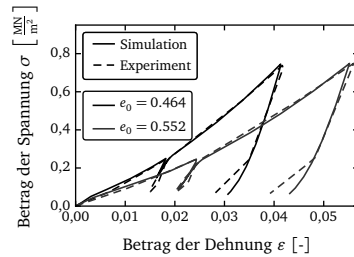
Tabelle 6.2: Modellparameter für das Mineralstoffgemisch SMA 11

Der größere Wert von n für den SMA 11 spiegelt die größere Krümmung der Kompressionskurve des Ödometersversuchs im Vergleich zum AB 11 wider. Die Grenz-porenzahlen liegen in einem für Kiesgemische charakteristischen Bereich. Die niedrigeren Werte für den AB 11 können mit der höheren Gleichförmigkeit der Korngrößenverteilung und der damit verbundenen höheren Verdichtungsfähigkeit begründet werden.

Die Parameter des erweiterten Modells ergeben sich aus der numerischen Parameteridentifikation anhand der Ödometersversuche mit einer einmaligen Entlastungs- und Wiederbelastungsphase. In welchem Umfang der gefundene Parametersatz das Spektrum des zyklischen Verformungsverhaltens der Mineralstoffgemische abdecken kann, muss in detaillierteren Untersuchungen auf Basis zusätzlicher Experimente analysiert werden. Die identifizierten Parameter erlauben jedoch eine hinreichend genaue Approximation der zur Verfügung stehenden Versuchsergebnisse und liegen dabei im Bereich der z. B. von KUDELLA/REUL [69] oder HOLLER [50] gegebenen Parametersätze des erweiterten Modells.



6.6.1: Ödometersversuch Mischgut AB 11



6.6.2: Ödometersversuch Mischgut SMA 11

Abbildung 6.6: Vergleich Experiment und Simulation des Ödometersversuchs

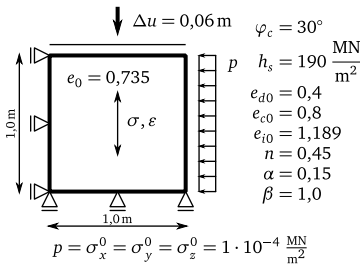
In Abbildung 6.6 sind experimentell ermittelte Kurven den Ergebnissen von Simulationen auf Basis der optimierten Parametersätze gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass das erweiterte Modell sehr gut zur Beschreibung des Verformungsverhaltens der Mineralstoffgemische geeignet ist. Die Entlastungs- und Wiederbelastungspfade können ebenso gut wiedergegeben werden wie die Entlastung am Versuchsende. Das grundsätzliche Verformungsverhalten des Mineralstoffgemischs als granulares Medium mit einer zunehmenden Steifigkeit infolge von Kompaktion und einer nicht-linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei einer Entlastung spiegelt sich in den Simulationsergebnissen wider.

6.4 Numerische Lösung der nichtlinearen Materialgleichungen

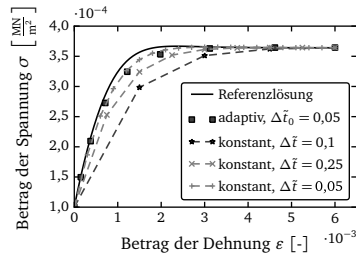
Die Bestimmung des Spannungszustands erfordert die Integration der Modellgleichungen in der Zeit. Eine geschlossene Lösung des Differentialgleichungssystems erster Ordnung kann im Allgemeinen nicht angegeben werden, so dass numerische Verfahren zur Lösung herangezogen werden müssen. Diese numerischen Verfahren müssen sowohl die Bestimmung des aktuellen Spannungszustands, als auch die Berechnung der konsistenten Tangentialmatrix für die Finite-Element-Methode ermöglichen.

Die Diskretisierung der Materialgleichungen in der Zeit mit Hilfe des in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Kollokationsverfahrens führt zu einem nichtlinearen Gleichungssystem, welches mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden kann. Aufgrund der hohen Komplexität der Materialgleichungen ist die analytische Bestimmung der notwendigen Tangentialmatrix jedoch nicht möglich. FELLIN/OSTERMAN [35] schlagen ein Verfahren vor, bei dem sowohl die Tangentialmatrix als auch der konsistente Materialoperator \mathbb{C} mit Hilfe numerischer Differentiation ermittelt werden können. Das Verfahren wird in Kombination mit einer adaptiven Zeitschrittsteuerung auch von ASCHENBRENNER [4] angewendet. Es zeigt sich jedoch, dass für die Konvergenz des Verfahrens gerade im Anfangsbereich sehr kleine Zeitschritte notwendig sind.

Mit Hilfe des in Abschnitt 4.3.3 vorgestellten Verfahrens der algorithmischen Differentiation können die notwendigen Ableitungen algorithmisch exakt ermittelt werden. Insbesondere in Kombination mit dem gedämpften Newton-Verfahren (Abschnitt 4.3.4) können sehr gute Approximationsergebnisse für große Schrittweiten gefunden werden. Dies ist im Hinblick auf das Verbundmodell vorteilhaft, da die vom fraktionalen Modell benötigte konstante Schrittweite den Einsatzbereich des Verbundmodells durch eine kleine Startschrittweite erheblich einschränkt.



6.7.1: Geometrie, Randbedingungen und Modellparameter



6.7.2: Spannungsverlauf bei verschiedenen Zeitschrittweiten

Abbildung 6.7: Lösungsverhalten am Beispiel eines Biaxialversuchs

ASCHENBRENNER vergleicht anhand eines biaxialen Elementversuchs das numerische Verhalten verschiedener Lösungsansätze. Allen dort vorgestellten Ansätzen ist gemein, dass eine Konvergenz nur mit einer kleinen initialen Schrittweite möglich ist. Es zeigt sich insbesondere, dass im Verlauf der Iteration bei zu groß gewählten Schrittweiten Zugzustände auftreten, für welche das Modell der Hypoplastizität nicht definiert ist und somit die Berechnung abgebrochen bzw. die Schrittweite korrigiert werden muss.

Anhand des biaxialen Elementversuchs zeigt sich das numerisch stabile Verhalten einer Kombination aus gedämpften Newton-Verfahren mit der Bestimmung der Tangentialmatrix über die algorithmische Differentiation – im Folgenden als *kombiniertes Verfahren* bezeichnet – deutlich. Die zugrundeliegenden Materialparameter, die Geometrie sowie die Randbedingungen sind äquivalent zu dem von ASCHENBRENNER untersuchten Beispiel gewählt und in Abbildung 6.7.1 dargestellt. Als vorgegebene Randverschiebung wird im Gegensatz zu ASCHENBRENNER ein Wert von $\delta u = 2 \cdot 0,03\text{ m}$ angesetzt, um einen weiteren Bereich untersuchen zu können. Die Lastschrittsteuerung erfolgt über eine Pseudozeit, hierbei entspricht $\Delta \tilde{t} \approx 0,05$ der bei ASCHENBRENNER notwendigen minimalen Zeitschrittweite. Die Untersuchung beschränkt sich auf das klassische Modell nach VON WOLFFERSDORFF [110].

Die aus der vorgegebenen Randverschiebung folgende Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist in Abbildung 6.7.2 dargestellt. Die Referenzlösung ist mit einer konstanten Schrittweite $\Delta \tilde{t} = 0,025$ berechnet. Die Beschränkung auf eine kleine Startschrittweite kann für das kombinierte Verfahren aufgegeben werden. Das gedämpfte Newton-Verfahren konvergiert für alle dargestellten Zeitschrittweiten gleichermaßen mit quadratischer Ordnung. Die für die sehr große Zeitschrittweite $\Delta \tilde{t} = 0,5$ vorhandene Abweichung verschwindet, sobald sich in der Simulation der Fließzustand einstellt.

Die entscheidenden Vorteile des kombinierten Verfahrens sind die deutlich erhöhte numerische Stabilität sowie die Tatsache, dass eine erfolgreiche Lösung der Materialgleichungen der Hypoplastizität nicht an eine adaptive Zeitschrittsteuerung oder an *substepping*-Algorithmen gebunden ist. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf das Verbundmodell, bei dem aufgrund der fraktionalen Formulierung eine konstante Zeitschrittweite notwendig ist.

7 Verbundmodell

Mit Hilfe der in den Kapiteln 5 und 6 vorgestellten Materialmodelle der Einzelkomponenten kann das in Abschnitt 3.1 motivierte Verbundmodell formuliert werden. Es zeigt sich, dass das Modell in der ursprünglichen Form nicht in der Lage ist, die in einem umfangreichen experimentellen Programm ermittelten Eigenschaften der Asphalte wiederzugeben. Im folgenden Kapitel werden deshalb Modifikationen eingeführt, mit denen es gelingt, das in den Versuchen beobachtete Verformungsverhalten zu beschreiben. Das modifizierte Modell ermöglicht es, sowohl den untersuchten Asphaltbeton AB 11 als auch den Splittmastixasphalt SMA 11 mit einem einheitlichen Modell über einen breiten Temperaturbereich zu beschreiben. Hierbei bleibt die Möglichkeit zur Variation der Volumenanteile auch im modifizierten Verbundmodell erhalten, d. h. auch für andere aus den bereits untersuchten Grundkomponenten zusammengesetzte Asphaltmischungen kann das Verformungsverhalten wiedergegeben werden.

7.1 Bestimmung der Volumenanteile des Verbundmodells

Das Mehrkomponentenmodell ist über die Volumenanteile der Einzelkomponenten definiert. Die im Straßenwesen gebräuchlichen Angaben zur Mischungsrezeptur beziehen sich auf den Bindemittelgehalt ω^b , den Füllergehalt ω^f sowie den Porenraum n^p . Während der Porenraum bereits als Volumenanteil gegeben ist, werden sowohl der Bindemittel- als auch der Füllergehalt in Massenprozent angegeben.

Zur Bestimmung der Volumenanteile der Einzelkomponenten muss zunächst der Anteil der Bitumenkomponente in eine auf das Volumen bezogene Formulierung überführt werden

$$\begin{aligned}\omega^b &= \frac{m_{ges}^b}{m_{ges}^b + m_{ges}^m} = \frac{\rho^b V_{ges}^b}{\rho^b V_{ges}^b + \rho_s^m V_{ges}^m} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_s^m V_{ges}^m}{\rho^b V_{ges}^b}} \\ \rightarrow \frac{V_{ges}^b}{V_{ges}^m} &= \frac{n_{ges}^b}{n_{ges}^m} = \omega^b \frac{\rho_s^m}{\rho^b} \frac{1}{1 - \omega^b} .\end{aligned}\quad (7.1)$$

Hierbei stellen die Größen n_{ges}^b und n_{ges}^m die real in der Mischung vorliegenden Volumenanteile dar, welche sich unter Verwendung der Sättigungsbedingung (3.2)

$$n_{ges}^m = \frac{1 - n^p}{\frac{\omega^b}{(1 - \omega^b)} \frac{\rho^m}{\rho^b} + 1} \quad (7.2)$$

$$n_{ges}^b = 1 - n_{ges}^m - n^p \quad (7.3)$$

ergeben. Der als Füller bezeichnete Feinstkornanteil der Mineralstoffkomponente wird im Mehrkomponentenmodell der Bindemittelkomponente zugeschlagen. Daher muss der in Massenprozent gegebene Fülleranteil ebenfalls in einen Volumenanteil transformiert werden. Hierbei wird angenommen, dass die Dichte des Fülleranteils äquivalent zur Korndichte der Mineralstoffmatrix ist. Es gilt

$$\omega^f = \frac{m^f}{m_{ges}^m} = \frac{\rho^f V^f}{\rho_s^m V_{ges}^m} \rightarrow n^f = \omega^f n_{ges}^m. \quad (7.4)$$

Die für die Mehrkomponentenformulierung notwendigen Volumenanteile folgen somit zu

$$n^m = n_{ges}^m - n^f \quad (7.5)$$

$$n^b = n_{ges}^b + n^f. \quad (7.6)$$

Bei einer Dichte der Gesteinskörnung aus Gabbro von $2,65 \text{ g/cm}^3$ und einer mittleren Dichte von $1,03 \text{ g/cm}^3$ für das verwendete Bitumen 50/70 können die in Tabelle 7.1 zusammengestellten Volumenanteile für die untersuchten Asphaltmischungen AB 11 sowie SMA 11 ermittelt werden.

Ein wesentliches Merkmal der Mehrkomponentenformulierung ist die Möglichkeit, über eine Variation der Volumenanteile der Einzelkomponenten verschiedenartige Asphaltmischungen beschreiben zu können. Für weiterführende Untersuchungen wird die Zusammensetzung einer Asphaltbinderschicht (ABi) und einer Asphalttragschicht (ATS) motiviert, mit deren Hilfe der Beschreibungsumfang des Verbundmodells untersucht wird. Diese Mischungen werden in dieser Arbeit auch für die Simulation des Verformungsverhaltens eines Straßenquerschnitts eingesetzt.

7.1.1: Kenngrößen der untersuchten Asphalte

	AB 11	SMA 11
ω^b [M.-%]	6,10	6,90
ω^f [M.-%]	8,00	9,00
n^p [Vol.-%]	4,40	2,40

7.1.2: Parameter des Verbundmodells

	AB 11	SMA 11
n^m [Vol.-%]	75,35	74,53
n^b [Vol.-%]	20,25	23,07
n^p [Vol.-%]	4,40	2,40

Tabelle 7.1: Volumenanteile bei den Asphaltmischungen AB 11 und SMA 11

7.2.1: Gewählte Kenngrößen laut ZTV

		ABi	ATS
ω^b	[M.-%]	5,50	4,80
ω^f	[M.-%]	7,00	6,00
n^p	[Vol.-%]	4,50	6,00

7.2.2: Parameter des Verbundmodells

		ABi	ATS
n^m	[Vol.-%]	77,20	78,17
n^b	[Vol.-%]	18,30	15,83
n^p	[Vol.-%]	4,50	6,00

Tabelle 7.2: Volumenanteile bei den Asphaltmischungen ABi und ATS

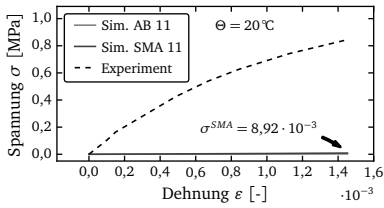
Die im Rahmen der ZTV ASPHALT-StB 07 [114] definierten Mischungen für typische Trag- und Binderschichten zeichnen sich durch ein Mineralstoffgemisch mit abgestufter Körnung und einen geringen Bindemittelgehalt aus. Von den untersuchten Gesteinskörnungen entspricht der Zuschlag des Asphaltbetons AB 11 den Anforderungen an Trag- und Binderschichten deutlich besser als der Zuschlag des Splittmastixasphalts SMA 11. Die Modellparameter der Bindemittelkomponente sind für ein spezifisches Bindemittel-Füller-Verhältnis von $\frac{\omega^f}{\omega^b} \approx 1,3$ ermittelt, das auch bei einer Variation der Volumenanteile konstant bleiben muss.

Unter den gegebenen Randbedingungen sind jeweils eine Mischung für eine Asphalttragschicht und für eine Asphaltbinderschicht exemplarisch gewählt. Die Mischungsrezepturen und die daraus folgenden Volumenanteile für das Mehrkomponentenmodell sind in Tabelle 7.2 angegeben.

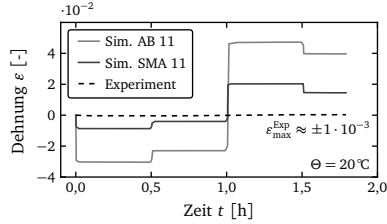
7.2 Vergleich experimenteller Ergebnisse mit Simulationsergebnissen des Verbundmodells

Der Vergleich von Simulationsergebnissen mit Resultaten experimenteller Untersuchungen an Asphaltproben zeigt, dass das in Abschnitt 3.1 vorgestellte Verbundmodell das Verformungsverhalten von Asphalt nur unzureichend wiedergeben kann. Das Verbundmodell unterschätzt auch bei angenommener Dehnungsäquivalenz die Festigkeit von Asphaltproben bei weitem.

Abbildung 7.1.1 zeigt, dass das Modell die in einem Zugversuch bei 20 °C zu beobachtende Steifigkeit einer Asphaltprobe nicht wiedergeben kann. Während im Versuch Spannungen von bis zu 1 MPa erreicht werden, liegen die maximalen Spannungen in der Simulation im Bereich von 10^{-3} MPa und sind damit deutlich zu niedrig. Auch das in Abbildung 7.1.2 dargestellte Kriechverhalten bei 20 °C wird nur unzureichend approximiert. Die aus der Simulation folgenden Dehnungen liegen im einstelligen Prozent-Bereich, während im Versuch maximale Dehnungen von $\approx 1\%$ erreicht werden. Die schlechte Approximation des Verformungsverhaltens ist für den gesamten experimentell untersuchten Temperaturbereich zu beobachten.



7.1.1: Zugversuch mit $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-5} 1/s$



7.1.2: Kriechversuch mit wechselnder Druck-Zug-Belastung $\dot{\sigma} = \mp 0,105 \text{ MPa}$

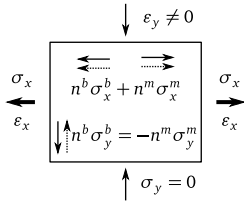
Abbildung 7.1: Vergleich experimenteller Ergebnisse mit Simulationen am unmodifizierten Verbundmodell

Anhand eines exemplarisch ausgewählten Zugversuchs werden die Zustandsgrößen im Verlauf der Berechnung näher betrachtet, um einen detaillierten Einblick in die im Modell auftretenden Wechselwirkungen zu erhalten, vgl. Abbildung 7.2. Infolge der aufgetragenen Dehnungen $\dot{\epsilon}_x$ stellen sich äußere Spannungen in Längsrichtung sowie Dehnungen in Querrichtung ein. Die äußeren Spannungen in Querrichtung sind aufgrund der Einaxialität des Versuchs null. Der Materialverbund ist über das Gleichgewicht der gewichteten Partialspannungen der Einzelkomponenten definiert: die Summe der Spannungen in Längsrichtung muss der äußeren Spannung entsprechen, während sich in Querrichtung ein inneres Gleichgewicht einstellt. Die in Abbildung 7.2.4 dargestellte Entwicklung der äußeren Spannungen und der zugehörigen gewichteten Partialspannungen in Längsrichtung zeigt, dass die Tragwirkung bei einer Zugbeanspruchung maßgeblich von der Bindemittelkomponente bestimmt ist. Im Gegensatz zu der von ASCHENBRENNER [4] getroffenen Annahme, dass die Zugfestigkeit von Asphalt allein durch die Bindemittelkomponente bestimmt ist, ist der Anteil der Mineralstoffspannungen infolge der Zugbelastung zwar klein, aber er verschwindet nicht. Infolge der Dehnungsäquivalenz stellen sich Partialspannungen in Querrichtung (Abbildungen 7.2.5 und 7.2.6) ein, da beim einaxialen Zugversuch

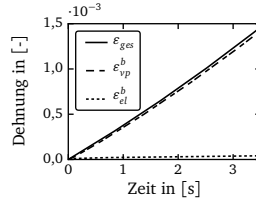
$$n^b \cdot \sigma_y^b = -n^m \sigma_y^m$$

gelten muss. Die auftretenden Zwangsspannungen in Querrichtung können über eine Querbehinderung erklärt werden: Die freie Verformung des Bindemittels wird in Querrichtung durch die Mineralstoffkomponente behindert, es entstehen Druckspannungen in der Mineralstoffkomponente.

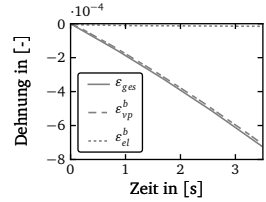
Obwohl die Mineralstoffkomponente einen Anteil an der Tragwirkung hat, sind die in der Simulation erreichten Spannungen wesentlich zu klein, um die Festigkeit von Asphaltproben zutreffend wiederzugeben. Die in Abbildung 7.2.2 dargestellten Dehnungen in Längsrichtung zeigen, dass der elastische Anteil der Dehnungen in



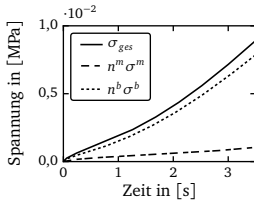
7.2.1: Prinzipskizze



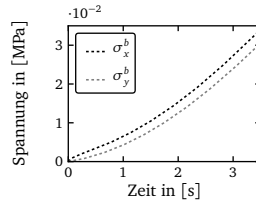
7.2.2: Dehnung in Längsrichtung



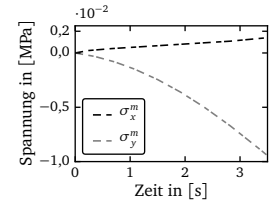
7.2.3: Dehnung in Querrichtung



7.2.4: Spannung in Längsrichtung



7.2.5: Bindemittelspannung



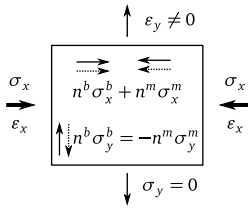
7.2.6: Mineralstoffspannung

Abbildung 7.2: Simulation eines Zugversuchs mit $\dot{\epsilon}_x = 5,2 \cdot 10^{-4} 1/s$ bei $20^\circ C$ mit den Modellparametern des SMA 11

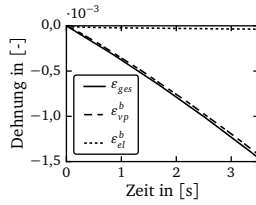
der Bindemittelkomponente verschwindend gering ist und infolge dessen die Verzerrungen des fraktionalen Maxwell-Modells rein visko-plastisch sind. Die Dehnungen in Querrichtung spiegeln dies wider: Die maßgeblich visko-plastischen Verzerrungen führen aufgrund der Annahme rein deviatorischen Fließens zu einem inkompressiblen Verformungszustand mit einer Querdehnung von $\epsilon_y \approx -0,5 \epsilon_x$.

Die sehr kleinen elastischen Dehnungen in Längsrichtung führen infolge der Reihenschaltung der rheologischen Elemente im fraktionalen Maxwell-Körper dazu, dass die Partialspannung der Bindemittelkomponente sehr klein ist. Der infolge der Querbehinderung vorhandene Anteil der Mineralstoffspannung in Längsrichtung ist ebenfalls gering im Vergleich zu den experimentell ermittelten Spannungen, so dass die gewichtete Summe der Partialspannungen ebenfalls zu klein wird.

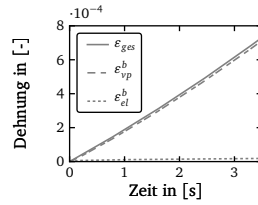
Mit Hilfe der Simulation eines Druckversuchs wird das Verhalten des Verbundmodells für einaxiale Druckbeanspruchungen untersucht. Die Randbedingungen sind in Abbildung 7.3.1 schematisch dargestellt. Die Spannungen in Längsrichtung (Abbildung 7.3.4) sind im Gegensatz zum Zugversuch maßgeblich durch die Spannungen in der Mineralstoffkomponente gegeben. Es zeigt sich die für Korngerüste charakteristische Zunahme der Steifigkeit mit wachsender Kompaktion. Die Partialspannung der Mineralstoffkomponente in Querrichtung (Abbildung 7.3.6) ist verschwindend gering. Dies kann äquivalent zum Zugversuch mit der maßgeblich durch visko-plastische Verformungsanteile geprägten Deformation und den damit verbundenen



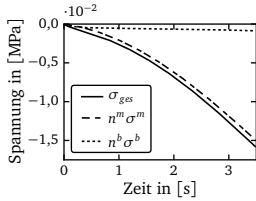
7.3.1: Prinzipskizze



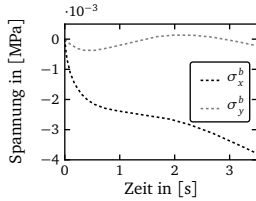
7.3.2: Dehnung in Längsrichtung



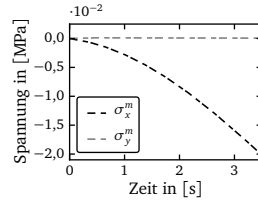
7.3.3: Dehnung in Querrichtung



7.3.4: Längsspannung



7.3.5: Bindemittelspannung



7.3.6: Mineralstoffspannung

Abbildung 7.3: Simulation eines Druckversuchs mit $\dot{\epsilon}_x = 5,2 \cdot 10^{-4} 1/s$ bei 20°C mit den Modellparametern des SMA 11

sehr kleinen Spannungen der Bindemittelkomponente begründet werden, vgl. hierzu Abbildungen 7.3.2 und 7.3.3. Das in der Simulation des Druckversuchs erreichte Spannungsniveau in Längsrichtung liegt mit $-1,5 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$ ebenfalls deutlich unter den in einaxialen Druckversuchen experimentell ermittelten Spannungswerten.

Die geringe Steifigkeit der Bindemittelkomponente und die damit verbundene maßgeblich viskose Verformung des Verbundes führt auch in der Simulation von Kriechversuchen zu deutlich zu großen Verschiebungsantworten. Die visko-plastischen Dehnungen der Bindemittelkomponente stellen sich in der Simulation spontan ein, der in experimentellen Untersuchungen zu beobachtende Verlauf der Kriechkurven mit primären und sekundären Kriechphasen kann nicht wiedergegeben werden.

7.3 Modifikationen am Verbundmodell

Das Verbundmodell kann in der ursprünglichen Form weder das Verformungsverhalten des Splittmastixasphalts noch des Asphaltbetons beschreiben. Es zeigt sich ebenso, dass das Modell die Steifigkeit der Asphaltmischungen für sämtliche untersuchten Temperaturen deutlich unterschätzt. Die vom Verbundmodell zu gering wiedergegebene Steifigkeit kann vor allem mit der im Modell nicht berücksichtigten Klebewirkung zwischen den Komponenten begründet werden. Die ursprüngliche

Annahme, dass die Dehnungsäquivalenz und die damit verbundenen Querbehinderungseffekte diese Klebewirkung beschreiben können, bestätigt sich nicht. Vielmehr führt die Annahme der Dehnungsäquivalenz dazu, dass die geringe Anfangssteifigkeit der Mineralstoffkomponente zu rein viskosen Fließzuständen auf wesentlich geringeren Spannungsniveaus führt, als in Versuchen zu beobachten ist. Zudem kann das Modell versteifende Effekte, wie sie sich infolge der Querbehinderung bei einem nahezu inkompressiblen Materialverhalten der Bindemittelkomponente und bei einem gleichzeitig hohen Mineralstoffanteil einstellen, nicht wiedergeben.

Im Folgenden werden Modifikationen eingeführt und begründet, mit denen es gelingt, auf Basis des ursprünglichen Verbundmodells das Verformungsverhalten von Asphalt beschreiben zu können. Die Modifikationen sollen hierbei den Mischungscharakter des Modells erhalten und gleichzeitig auf den bereits ermittelten Modellparametern der Einzelkomponenten aufbauen. Das grundsätzliche Ziel bei den Modifikationen ist eine Erhöhung der Steifigkeit der Einzelkomponenten, da sich in den untersuchten Zug- und Druckversuchen (Abbildungen 7.2 und 7.3) zeigt, dass weder die Steifigkeit des Bindemittels noch die Steifigkeit der Mineralstoffkomponente ausreichend sind, um das Verformungsverhalten zu approximieren. Sämtliche Modifikationen sind hierbei temperaturabhängig formuliert.

Die Steifigkeit der Bindemittelkomponente wird wesentlich vom Modellparameter des Elastizitätsmoduls E_{el} der linearen Feder des Maxwell-Modells bestimmt. Die Modifikation dieses Parameters ermöglicht, dass höhere Spannungsniveaus in den Zugversuchen erreicht werden. Der modifizierte Elastizitätsmodul \tilde{E}_{el} wird mit dem Ausgangswert E_{el} und dem Skalierungsparameter \hat{E}_{el} mit

$$\tilde{E}_{el}(\Theta) = \hat{E}_{el} \cdot E_{el} \cdot \exp \left[\left(\widehat{W}_{E_{el}} + W_{E_{el}} \right) \Theta \right] \quad (7.7)$$

definiert. Hierbei wird die Temperaturabhängigkeit mit Hilfe des Parameters $\widehat{W}_{E_{el}}$ verändert. Die Temperaturabhängigkeit des modifizierten Parameters ist damit äquivalent zum Materialmodell des Bindemittels über einen exponentiellen Ansatz mit linearem Exponenten gegeben.

Eine ausschließliche Erhöhung des E-Moduls der linearen Feder des Maxwell-Modells auf das zur Beschreibung der Versuche notwendige Maß führt zu einem nahezu ideal elastischen Verformungsverhalten der Bindemittelkomponente, wodurch Kriechprozesse und die charakteristische nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung nicht mehr erfasst werden können. Erst die gleichzeitige Modifikation der Steifigkeit und der Viskosität des fraktionalen Dämpfers führt zu einem Satz von Modellparametern, mit dem das Verformungsverhalten von Asphalt beschrieben werden kann.

Die Modifikation des E-Moduls E_{vp} des fraktionalen Elements erfolgt analog zur Modifikation des E-Moduls der linearen Feder nach Gleichung (7.7),

$$\tilde{E}_{vp}(\Theta) = \hat{E}_{vp} \cdot E_{vp} \cdot \exp \left[\left(\widehat{W}_{E_{vp}} + W_{E_{vp}} \right) \Theta \right]. \quad (7.8)$$

Die Viskosität des fraktionalen Elements ist im Maxwell-Modell über die Bezugsdehnrate $\dot{\epsilon}_0$ und über die Bezugsspannung σ_0 definiert. Für das modifizierte Verbundmodell wird nur die Bezugsspannung angepasst. Hierbei wird die Temperaturabhängigkeit äquivalent zum ursprünglichen Ansatz im Bindemittelmodell exponentiell mit einem quadratischen Exponenten definiert. Mit Hilfe der Modifikationsparameter $\widehat{\sigma}_0$, $\widehat{W}_{\sigma_0}^l$ sowie $\widehat{W}_{\sigma_0}^q$ wird für die modifizierte Bezugsspannung

$$\tilde{\sigma}_0(\Theta) = \widehat{\sigma}_0 \cdot \sigma_0 \cdot \exp \left[\left(\widehat{W}_{\sigma_0}^q + W_{\sigma_0}^q \right) \cdot \Theta^2 + \left(\widehat{W}_{\sigma_0}^l + W_{\sigma_0}^l \right) \cdot \Theta \right] \quad (7.9)$$

angesetzt.

Die Anpassung der Bezugsspannung und somit der Viskosität des Bindemittelmodells führt zu einer veränderten Entwicklung der visko-plastischen Dehnungsanteile. Im Bindemittelmodell ist die nichtlineare Abhängigkeit der visko-plastischen Dehnrate vom Spannungsniveau zusätzlich über den Parameter n_{vp} des Norton-Ansatzes beschrieben. Um das Kriechverhalten von Asphaltmischungen infolge des veränderten Spannungsniveaus zutreffend beschreiben zu können, wird der Parameter n_{vp} ebenfalls angepasst. Im Gegensatz zum multiplikativen Ansatz für die E-Moduli und die Bezugsspannung wird hierfür ein additiver Ansatz für den modifizierten Norton-Parameter

$$\tilde{n}_{vp}(\Theta) = n_{vp} + \widehat{n}_{vp} \cdot \exp \left[\widehat{W}_{n_{vp}} \cdot \Theta \right] \quad (7.10)$$

eingeführt. Hierbei wird für die Modifikation eine exponentielle Temperaturabhängigkeit mit linearem Exponenten gewählt. Der Modifikationsparameter \widehat{n}_{vp} wird positiv definiert, so dass die Nichtlinearität des Verbundmodells in keinem Fall geringer als die des Bindemittelmodells werden kann.

Die bisher eingeführten Modifikationen ermöglichen es, die in Versuchen zu beobachtende höhere Steifigkeit und Viskosität von Asphaltwerkstoffen zu erfassen. Im Verbundmodell wird die Steifigkeit auch über das Verhalten der Mineralstoffkomponente wiedergegeben. Es zeigt sich, dass die alleinige Modifikation der Bindemittelkomponente zu einem Verbundmodell führt, mit dem das grundlegende Verformungsverhalten von Asphalt wiedergegeben werden kann. Wesentlich bessere Ergebnisse können jedoch erzielt werden, wenn auch Parameter des Mineralstoffmodells modifiziert werden.

Im Rahmen der Modellanpassung zeigt sich, dass vor allem der Exponent n und die Steifigkeitsfaktoren m_R und m_T einen entscheidenden Einfluss auf das mit dem Verbundmodell beschreibbare Verformungsverhalten haben. Eine Modifikation dieser Parameter ist sinnvoll und begründbar.

Der Exponent n des hypoplastischen Mineralstoffmodells ist maßgeblich von der Kornform abhängig und steuert die Druckabhängigkeit des Materialverhaltens. Für den Grenzwert $n = 1,0$ folgt ein druckunabhängiger Kompressionsmodul. Dieser für das Mineralstoffmodell theoretische Grenzwert wird bei Gesteinskörnungen in der

Regel nicht erreicht, hier gibt $n = 0,66$ den charakteristischen Grenzwert für die dichteste Kugelpackung an. Der Parameter n nimmt entsprechend HERLE [48] zu, wenn:

- (i) die Ungleichförmigkeit der Korngrößenverteilung abnimmt,
- (ii) die Rauigkeit der Körner zunimmt oder
- (iii) der wirksame Korndurchmesser größer wird.

Im Verbund ist der Porenraum mit Bindemittel gefüllt, wodurch die Ungleichförmigkeit in der Korngrößenverteilung vermindert wird. Zudem führt die Klebewirkung zu einem Effekt, der einer Erhöhung der Rauigkeit äquivalent ist. Die Umhüllung der Körner mit dem Bindemittel kann als eine Steigerung des wirksamen Korndurchmessers interpretiert werden. Auf Basis dieser Effekte wird der Parameter n mit Hilfe der Parameter \widehat{W}_n und $\widehat{\Theta}_n$ über

$$\tilde{n}(\Theta) = n + (1 + n) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\widehat{W}_n \cdot (\Theta - \widehat{\Theta}_n) \right) \right] \quad (7.11)$$

temperaturabhängig definiert. Die Beschreibung über die arctan-Funktion ermöglicht es, den modifizierten Parameter auf den Bereich $n \leq \tilde{n} \leq 1,0$ zu beschränken.

Die Faktoren m_R und m_T des erweiterten hypoplastischen Materialmodells charakterisieren die Steifigkeitserhöhung infolge einer Verformung der intergranularen Zwischenschicht. Im Verbund ist diese Zwischenschicht mit Bindemittel gefüllt, was eine Erhöhung der Steifigkeitsfaktoren rechtfertigt. Der Einfluss des Bindemittels auf die Steifigkeitserhöhung wird für den Parameter m_R über eine additive Modifikation der Form

$$\tilde{m}_R(\Theta) = m_R + \widehat{m}_R \cdot \exp \left[\widehat{W}_{m_R} \cdot \Theta \right] \quad (7.12)$$

realisiert. Die Temperaturabhängigkeit des Steifigkeitsfaktors \tilde{m}_R kann hierbei mit der temperaturabhängigen Steifigkeit der Bindemittelkomponente begründet werden. Da mit Hilfe der zur Verfügung stehenden einaxialen Versuche keine Aussage über den steifigkeitserhöhenden Effekt bei einer Änderung der Belastungsrichtung um 90° getroffen werden kann, wird die Temperaturabhängigkeit des Parameters \tilde{m}_T identisch formuliert.

7.4 Versuchsprogramm

Das dieser Arbeit zugrundeliegende Materialmodell für den Verbundwerkstoff Asphalt beschreibt das Verformungsverhalten von Asphaltmischungen anhand der Modellparameter der Einzelkomponenten und deren Volumenanteilen. Für die Verifikation dieses Modells ist ein umfangreiches experimentelles Programm am Institut für Straßenwesen der TU Braunschweig durchgeführt. Das Versuchsprogramm ist so

gewählt, dass die charakteristischen Eigenschaften des Verbundwerkstoffs Asphalt aktiviert werden und die entsprechenden Modellparameter identifiziert werden können.

Das komplette Versuchsprogramm umfasst Experimente für einen Temperaturbereich von -20°C bis 30°C und deckt somit ein breites Spektrum temperaturabhängiger Effekte ab, welche das Verformungsverhalten maßgeblich beeinflussen. So ist das Verformungsverhalten von Asphalt im Tieftemperaturbereich maßgeblich von Schädigungseffekten geprägt. Im Bereich hoher Temperaturen können Umlagerungseffekte bis hin zum Ausquetschen des Bindemittels beobachtet werden.

Infolge der notwendig gewordenen Modifikationen am Verbundmodell liegt der Fokus der Untersuchungen auf dem grundlegenden Materialverhalten von Asphaltmischungen. Die von ASCHENBRENNER [4] eingeführten Erweiterungen zur Beschreibung von Schädigungseffekten sind in dieser Arbeit nicht in das modifizierte Modell integriert. Ebenso ist es mit dem vorliegenden Modell aufgrund der angesetzten Dehnungsäquivalenz nicht möglich, die Entmischung beim Auspressen der Bindemittelkomponente zu beschreiben. Daher werden die zur Identifikation der Modellparameter verwendeten Versuche auf einen Temperaturbereich von -10°C bis 20°C für den Splittmastixasphalt beschränkt. Da beim Asphaltbeton aufgrund des geringeren Bindemittelgehalts schon bei -10°C sprödes Materialverhalten mit Schädigungseffekten das Verformungsverhalten bestimmt, werden für die Identifikation der Modellparameter des AB 11 die Versuchsdaten der experimentellen Untersuchungen für den Temperaturbereich von 0°C bis 20°C verwendet.

Für die Untersuchung der Asphaltproben kommen prismatische Probekörper zum Einsatz, welche in Ihren Abmessungen den prismatischen Probekörpern der Bindemittelversuche entsprechen, vgl. hierzu Abbildung 5.10.1. Die Probekörper werden in weggeregelten Zugversuchen verschiedenen Dehnraten und in kraftgeregelten Kriechversuchen verschiedenen Beanspruchungsniveaus ausgesetzt. Hierbei kommt die bereits bei den Bindemittelversuchen erfolgreich eingesetzte Prüftechnik zum Einsatz (Abbildung 5.11.1). Eine Übersicht über das Versuchsprogramm für die Identifikation der Modifikationsparameter gibt Tabelle 7.3. Die experimentell ermittelten Daten sind für die Parameteridentifikation aufbereitet und in das dem Evolutionsalgorithmus zugrundeliegende Datenbankschema überführt.

weggeregelte Zugversuche	kraftgeregelte Kriechversuche
Dehnraten (Zug): $5,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/s}$; $1,04 \cdot 10^{-4} \text{ 1/s}$; $5,2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/s}$	Belastungen (Zug): $0,04 \text{ MPa} - 0,17 \text{ MPa}$
Temperaturen: -10°C (nur SMA 11) ; 0°C ; 10°C und 20°C	

Tabelle 7.3: Übersicht über die Versuche an Asphaltprobekörpern

7.4.1 Parameteridentifikation

Die Ergebnisse der Parameteridentifikation zeigen, dass die gewählten Modifikationen zu einer sehr guten Beschreibung der Versuche durch das Verbundmodell führen. Die Modellparameter sind für die untersuchten Asphaltmischungen AB 11 sowie SMA 11 in den Tabellen 7.4 respektive 7.5 zusammengefasst. Das signifikant verschiedene Verformungsverhalten der Asphalte spiegelt sich in der Variation der ermittelten Parameter wider. Die Temperaturabhängigkeit der Parameter ist in Abbildung 7.4 dargestellt und wird im Folgenden analysiert. Hierfür werden die Modifikationsparameter der Asphaltmischungen bei einer Temperatur von 0 °C miteinander verglichen und der im Vergleich zum Modell der Einzelkomponenten veränderte Temperaturverlauf interpretiert.

7.4.1: Modifikation der Mineralstoffparameter

$\widehat{\Theta}_n$	\widehat{W}_n	\widehat{m}_R	\widehat{W}_{m_R}	\widehat{m}_T	\widehat{W}_{m_T}
9,89	$3,51 \cdot 10^{-2}$	5,0	$-7,86 \cdot 10^{-2}$	$= \widehat{m}_R$	$= \widehat{W}_{m_R}$

7.4.2: Modifikation der E-Moduli des fraktionalen Modells

\widehat{E}_{el}	$\widehat{W}_{E_{el}}$	\widehat{E}_{vp}	$\widehat{W}_{E_{vp}}$
174,40	$-9,02 \cdot 10^{-2}$	18,10	$-9,99 \cdot 10^{-2}$

7.4.3: Modifikation der Bezugsspannung und des Norton-Parameters

$\widehat{\sigma}_0$	$\widehat{W}_{\sigma_0}^q$	$\widehat{W}_{\sigma_0}^l$	\widehat{n}_{vp}	$\widehat{W}_{n_{vp}}$
11,08	$-3,04 \cdot 10^{-3}$	0,30	1,01	$-2,6 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 7.4: Modellparameter der Modifikation für den Asphaltbeton AB 11

Abbildung 7.4.1 stellt die Entwicklung des modifizierten E-Moduls der linearen Feder des fraktionalen Modells im Vergleich zum Modul des Bindemittels dar. Der Elastizitätsmodul \widehat{E}_{el} liegt für den AB 11 um den Faktor 174 höher als beim ursprünglichen Bindemittelmodell. Das Verbundmodell kann durch die deutlich höhere Steifigkeit wesentlich höhere Spannungsniveaus im Zugversuch wiedergeben. Die Erhöhung für den Splittmastixasphalt fällt mit dem Faktor 94 geringer aus. Dies spiegelt die in Versuchen zu beobachtende höhere Festigkeit des AB 11 im Vergleich zum SMA 11 wider. Die Temperaturabhängigkeit des Modifikationsparameters führt dazu, dass die Anfangssteifigkeit des AB 11 über den gesamten untersuchten Temperaturbereich größer ist als beim SMA 11.

Die notwendige Erhöhung des Elastizitätsmoduls \widehat{E}_{vp} fällt für beide untersuchten Asphalte mit einer Skalierung von ca. 20 bei einer Temperatur von 0 °C wesentlich geringer aus. Wie in Abbildung 7.4.2 dargestellt, steigen die notwendigen Skalie-

7.5.1: Modifikation der Mineralstoffparameter

$\widehat{\Theta}_n$	\widehat{W}_n	\widehat{m}_R	\widehat{W}_{m_R}	\widehat{m}_T	\widehat{W}_{m_T}
-7,45	0,55	0,55	-0,25	$= \widehat{m}_R$	$= \widehat{W}_{m_R}$

7.5.2: Modifikation der E-Moduli des fraktionalen Modells

\widehat{E}_{el}	$\widehat{W}_{E_{el}}$	\widehat{E}_{vp}	$\widehat{W}_{E_{vp}}$
98,63	$-7,91 \cdot 10^{-2}$	21,29	-0,28

7.5.3: Modifikation der Bezugsspannung und des Norton-Parameters

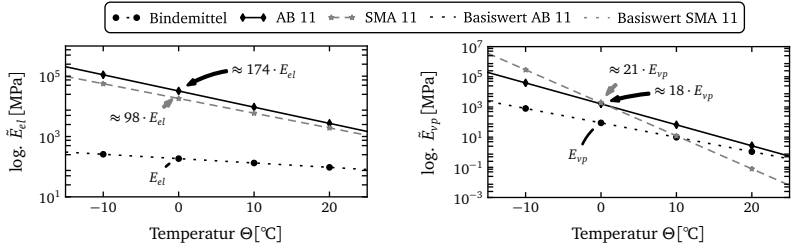
$\widehat{\sigma}_0$	$\widehat{W}_{\sigma_0}^q$	$\widehat{W}_{\sigma_0}^l$	\widehat{n}_{vp}	$\widehat{W}_{n_{vp}}$
11,65	$1,02 \cdot 10^{-3}$	0,15	0,82	$-1,09 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 7.5: Modellparameter der Modifikation für den Splittmastixasphalt SMA 11

rungsfaktoren im Niedrigtemperaturbereich stärker an als für den Parameter \widetilde{E}_{el} . Während der grundlegende lineare Charakter des Verlaufs über den Temperaturbereich für den AB 11 erhalten bleibt, ist der Verlauf beim SMA 11 exponentiell. Im Tieftemperaturbereich ist eine starke Erhöhung notwendig, dagegen ist der Wert des Elastizitätsmoduls des fraktionalen Elements für hohe Temperaturen kleiner als beim Bindemittel. Die deutlich veränderte Charakteristik der Temperaturabhängigkeit des Parameters E_{vp} bestätigt zusätzlich die Einführung eines Modifikationsparameters für die Temperaturabhängigkeit.

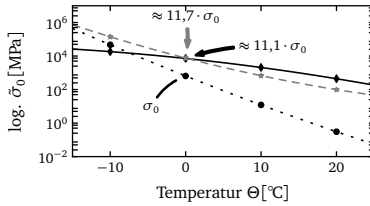
Die Viskosität des Materialverhaltens wird im Materialmodell maßgeblich von der Bezugsspannung $\widetilde{\sigma}_0$ beeinflusst. Bei der Basistemperatur von 0°C liegen die Erhöhungsfaktoren mit ca. 11 für beide untersuchten Asphalte auf einem ähnlichen Niveau. Die in Abbildung 7.4.3 dargestellte Temperaturabhängigkeit des Modifikationsparameters $\widetilde{\sigma}_0$ führt für Temperaturen über 0°C für beide Asphalte zu höheren Viskositäten. Im Tieftemperaturbereich ist die modifizierte Bezugsspannung des SMA 11 größer als die des Bindemittels, während die Bezugsspannung des AB 11 leicht unter der des Bindemittels liegt. Da bei der Identifikation der Modellparameter jedoch keine Versuche am AB 11 bei -10°C eingegangen sind, muss in weiteren Untersuchungen mit zusätzlichen Experimenten geklärt werden, ob die identifizierte Temperaturabhängigkeit das Materialverhalten zutreffend widerspiegelt.

Der modifizierte Parameter \widetilde{n}_{vp} repräsentiert die nichtlineare Abhängigkeit der viskoplastischen Dehnrates der Bindemittelkomponente von den Spannungen. Die Anpassung zeigt, dass die angenommene Temperaturabhängigkeit des modifizierten Parameters verschwindend gering ausfällt, der Wert des Parameters der Temperaturmodifikation $\widehat{W}_{n_{vp}} \approx 10^{-6}$ ist für beide Asphalte klein. Die Modifikation des Norton-Parameters liegt für den AB 11 um den Faktor 1,9 höher als der Grundwert

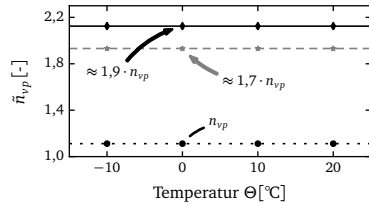


7.4.1: Steifigkeit \tilde{E}_{el} der Maxwell-Feder

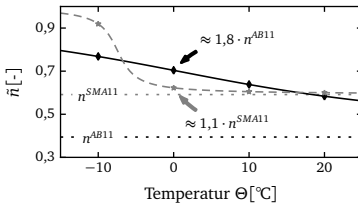
7.4.2: Steifigkeit \tilde{E}_{vp} des fraktionalen Elements



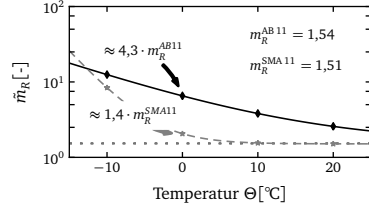
7.4.3: Bezugsspannung $\tilde{\sigma}_0$ des fraktionalen Elements



7.4.4: Norton-Parameter \tilde{n}_{vp}



7.4.5: Exponent \tilde{n} des hypoplastischen Modells



7.4.6: Steifigkeitsfaktoren \tilde{m}_R und \tilde{m}_T des hypoplastischen Modells

Abbildung 7.4: Temperaturabhängigkeit der Modifikationsparameter

des Bindemittels. Das veränderte Kriechverhalten des SMA 11 spiegelt sich in einem um den Faktor 1,7 erhöhten Grad der Nichtlinearität wider.

Abbildung 7.4.5 zeigt den Verlauf der Temperaturabhängigkeit für die modifizierten Exponenten des Komponentenmodells der Mineralstoffphase im Vergleich zu den für die Gesteinskörnungen AB 11 und SMA 11 ermittelten Exponenten. Für den AB 11 stellt sich bei 0 °C ein um den Faktor 1,8 höherer Wert für den Exponenten ein. Über den Temperaturbereich betrachtet fällt die Erhöhung für niedrige Temperaturen höher und für hohe Temperaturen niedriger aus, hierbei ist der Verlauf nahezu linear. Dies kann mit der gleichmäßig gestuften Gesteinskörnung des AB 11 begründet

werden, da hier die homogenisierenden Effekte des Bindemittels weniger stark zur Geltung kommen.

Für den SMA 11, dessen Mineralstoffgemisch eine ungleichmäßig gestufte Korngrößenverteilung aufweist, zeigt sich, dass im hohen Temperaturbereich die homogenisierende Wirkung des Bindemittels aufgrund der geringen Steifigkeit wenig ausgeprägt ist und der Exponent \tilde{n} nahezu dem des Mineralstoffmodells entspricht. Bei niedrigen Temperaturen führt die deutlich höhere Steifigkeit des Bindemittels zu einem starken Homogenisierungseffekt. Der Temperaturverlauf gibt hierbei den charakteristischen Verlauf der zugrundeliegenden Arkustangens-Funktion wieder.

Der Verlauf der modifizierten Steifigkeitsfaktoren \tilde{m}_R und \tilde{m}_T im Vergleich zu den Basiswerten der Mineralstoffmodelle ist in Abbildung 7.4.6 dargestellt. Die Steifigkeitsfaktoren für den AB 11 fallen für alle Temperaturen höher aus als für das Mineralstoffmodell. Das Bindemittel trägt aufgrund der gleichmäßigen Korngrößenverteilung über den gesamten Temperaturbereich zur Steifigkeitserhöhung der intergranularen Zwischenschicht bei. Der steifigkeitserhöhende Effekt des Bindemittels als intergranulare Zwischenschicht stellt sich beim SMA 11 nur für tiefe Temperaturen ein. Der Verlauf der Steifigkeitserhöhung über den Temperaturverlauf hat einen deutlich ausgeprägteren exponentiellen Charakter als beim AB 11. Dies kann wie schon beim Exponenten \tilde{n} mit der ungleichmäßigen Korngrößenverteilung des mineralischen Zuschlags für den SMA 11 begründet werden.

7.4.2 AB 11 – Vergleich von Simulation und Experiment

In Abbildung 7.5 sind die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die der Parameteranpassung zugrundeliegenden Zugversuche am AB 11 den Ergebnissen entsprechender Simulationen gegenübergestellt. Die Simulationen sind hierbei mit dem optimierten Satz von Modellparametern durchgeführt. Es zeigt sich, dass das modifizierte Verbundmodell das Verformungsverhalten von Asphaltbetonproben sehr gut wiedergeben kann. Bei einer Temperatur von 0 °C werden sowohl die Anfangssteifigkeit als auch das nichtlineare Verhalten sehr gut approximiert. Der Effekt der abnehmenden Steifigkeit mit zunehmender Dehnung kann jedoch bei einer Temperatur von 20 °C nicht optimal abgebildet werden. Hier gibt die Simulation für hohe Dehnraten ein nahezu lineares Verhalten wieder, vgl. Abbildung 7.5.9.

Abbildung 7.6 fasst die experimentellen Ergebnisse der Kriechversuche am AB 11 im Vergleich zu Simulationsergebnissen zusammen. Das nichtlineare Kriechverhalten kann für die Temperaturen 0 °C und 20 °C insbesondere in der Belastungsphase sehr gut approximiert werden. Während bei 0 °C auch das Kriechverhalten nach der Entlastung hinreichend genau abgebildet wird, liegen die Dehnungen am Ende der Entlastungsphase bei 20 °C deutlich unter denen des Experiments. Hierbei zeigt sich zudem, dass in der Simulation die bleibenden Dehnungen bei einem längeren

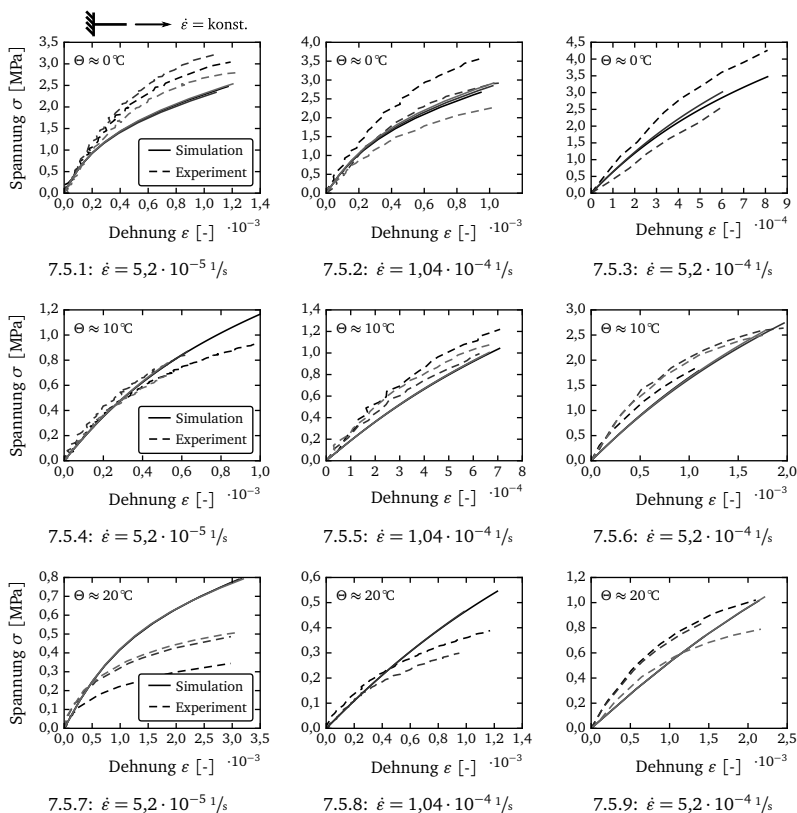


Abbildung 7.5: Zugversuche am Asphaltbeton AB 11 bei verschiedenen Temperaturen Θ und Dehnraten $\dot{\epsilon}$

Untersuchungszeitraum weiter abnehmen würden, während sich die bleibenden Dehnungen im Experiment bereits kurz nach der Entlastungsphase einstellen. Um das Verformungsverhalten von Asphaltbeton während der Entlastung besser beschreiben zu können, kann das fraktionale Maxwell-Modell der Bindemittelkomponente durch ein fraktionales Burgers-Modell ersetzt werden, da sich bereits kurz nach der Entlastung einstellende rein plastische Dehnungen mit diesem Modell besser beschreiben lassen.

Der Vergleich der Ergebnisse auf Basis des modifizierten Verbundmodells mit Kriechversuchen bei Temperaturen $\Theta \geq 10^\circ\text{C}$ zeigt, dass das Verformungsverhalten nur unzureichend wiedergegeben wird. Der in Abbildung 7.6.6 dargestellte Verlauf der maximal im Kriechversuch erreichten Dehnungen über die Temperatur gibt den

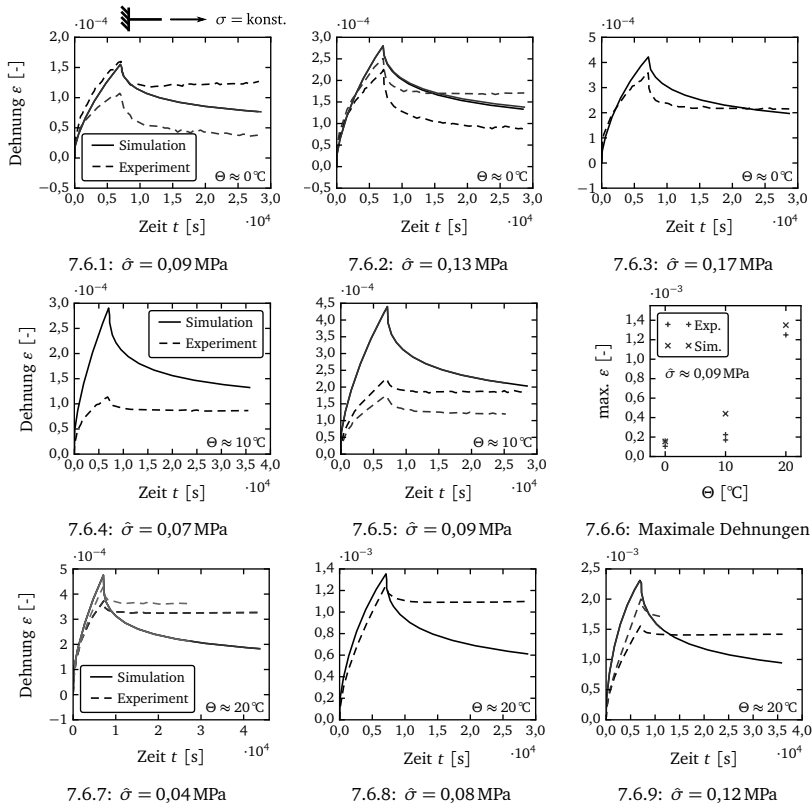
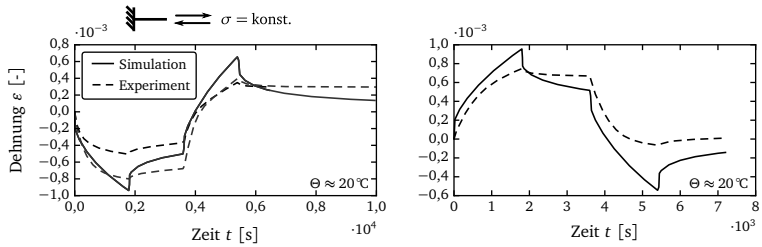


Abbildung 7.6: Kriechversuche am Asphaltbeton AB 11 bei verschiedenen Temperaturen Θ und Zugbelastungen $\dot{\sigma}$

grundsätzlichen Verlauf der Temperaturabhängigkeit wieder. Der Ansatz der Temperaturabhängigkeit sollte für zukünftige Untersuchungen modifiziert werden.

Für den Asphaltbeton AB 11 liegen neben den Kriechversuchen mit einer konstanten Zugbeanspruchung Versuche mit Lastwechseln vor. Die vorliegenden Versuche sind bei einer Temperatur von 20°C durchgeführt und fließen in die Parameteridentifikation ein. Einen Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den Simulationsergebnissen zeigt Abbildung 7.7. Das modifizierte Verbundmodell kann das Verformungsverhalten der Asphaltbetonproben sehr gut beschreiben. Für eine anfängliche Druckbelastung (Abbildung 7.7.1) wird der Verlauf der Dehnungen sowohl im Druck- als auch im Zugbereich hinreichend genau approximiert. Am Ende der zweiten Entlastungsphase zeigt sich, dass äquivalent zum Kriechzugversuch kein



7.7.1: Kriechversuch mit wechselnder Druck-Zug-Belastung $\hat{\sigma} = \pm 0,105 \text{ MPa}$

7.7.2: Kriechversuch mit wechselnder Zug-Druck-Belastung $\hat{\sigma} = \pm 0,105 \text{ MPa}$

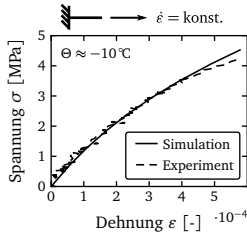
Abbildung 7.7: Kriechversuche am Asphaltbeton AB 11 mit wechselnder Beanspruchung bei einer Temperatur von $\Theta = 20^\circ \text{C}$

stationärer Zustand erreicht ist. Für eine anfängliche Zugbelastung (Abbildung 7.7.2) werden die Dehnungen in der zweiten Be- und Entlastungsphase überschätzt. Auch hier stellen die am Ende der zweiten Entlastungsphase erreichten Dehnungen nicht die endgültigen visko-plastischen Dehnungen dar. Eine Erweiterung des Bindemittelmodells zu einem fraktionalen Burgers-Modell kann an dieser Stelle dazu führen, dass das Materialverhalten zutreffender beschrieben wird.

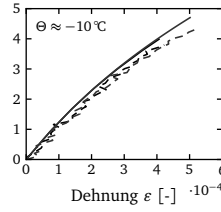
ASCHENBRENNER [4] nimmt für das von ihm entwickelte Mehrkomponentenmodell an, dass die Zugfestigkeit von Asphaltproben allein von der Bindemittelkomponente beeinflusst wird und sich eine deutliche Steifigkeitserhöhung in Druckrichtung infolge des Mitwirkens der Mineralstoffkomponente einstellt. Die Versuche zeigen jedoch, dass selbst bei einer Temperatur von 20°C , bei der das Bindemittel eine sehr geringe Steifigkeit im Vergleich zum Mineralstoff besitzt, keine signifikanten Unterschiede im Verformungsverhalten der in den Abbildungen 7.7.1 und 7.7.2 gegenübergestellten Versuche zu beobachten sind. Das modifizierte Verbundmodell beschreibt die annähernd gleiche Tragwirkung im Druck- und Zugbereich korrekt. Es ist jedoch anzustreben, in weiterführenden Untersuchungen genauer zu klären, wie die Klebewirkung zwischen den Komponenten das Verhältnis der Zugfestigkeit zur Druckfestigkeit beeinflusst und in welcher Art und Weise dieser Effekt in das Verbundmodell integriert werden kann.

7.4.3 SMA 11 – Vergleich von Simulation und Experiment

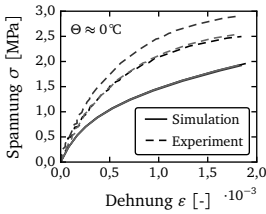
Der Vergleich der experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Zugversuchen am Splittmastixasphalt SMA 11 mit Simulationsergebnissen ist in Abbildung 7.8 zusammengefasst.



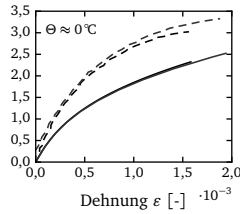
7.8.1: $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-5} 1/s$



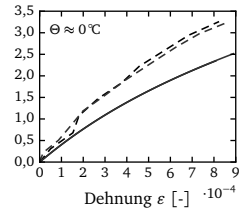
7.8.2: $\dot{\epsilon} = 1,04 \cdot 10^{-4} 1/s$



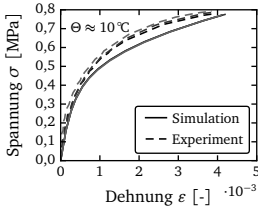
7.8.3: $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-5} 1/s$



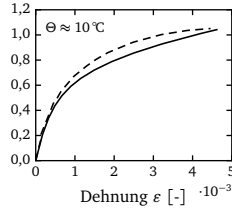
7.8.4: $\dot{\epsilon} = 1,04 \cdot 10^{-4} 1/s$



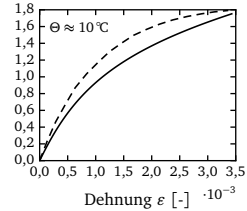
7.8.5: $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-4} 1/s$



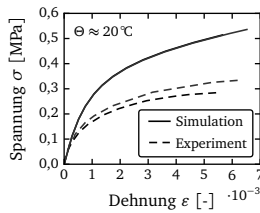
7.8.6: $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-5} 1/s$



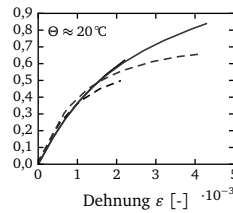
7.8.7: $\dot{\epsilon} = 1,04 \cdot 10^{-4} 1/s$



7.8.8: $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-4} 1/s$



7.8.9: $\dot{\epsilon} = 1,04 \cdot 10^{-4} 1/s$



7.8.10: $\dot{\epsilon} = 5,2 \cdot 10^{-4} 1/s$

Abbildung 7.8: Zugversuche am Splittmastixasphalt SMA 11 bei verschiedenen Temperaturen Θ und Dehnraten $\dot{\epsilon}$

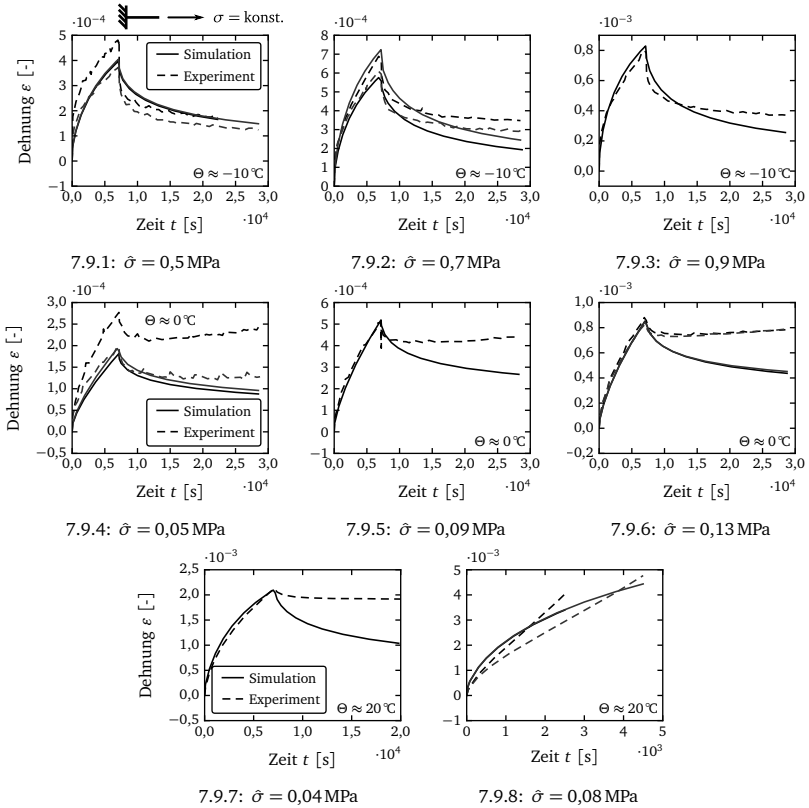


Abbildung 7.9: Kriechversuche am Splittmastixasphalt SMA 11 bei verschiedenen Temperaturen Θ und Zugbelastungen $\dot{\sigma}$

Die Simulationen können das Verformungsverhalten des SMA 11 insbesondere für die Temperaturen -10°C und 10°C zutreffend wiedergeben. Sowohl die initiale Steifigkeit der Asphaltproben als auch die nichtlinear abnehmende Steifigkeit werden sehr gut approximiert. Bei 0°C können die im Versuch erreichten Spannungsniveaus in der numerischen Berechnung nicht erzielt werden. Das nichtlineare Verhalten wird jedoch hinreichend genau approximiert. Bei 20°C wird das erreichbare Spannungsniveau überschätzt, insbesondere kann die nichtlinear abnehmende Steifigkeit nur unzureichend erfasst werden. Die Tatsache, dass für -10°C und 10°C die Versuche sehr gut approximiert werden, während die Steifigkeit bei 0°C unterschätzt und bei 20°C überschätzt wird, deutet darauf hin, dass für bessere Anpassungsergebnisse die Temperaturabhängigkeit mit erweiterten Ansätzen beschrieben werden muss. Welche

erweiterten Ansätze verwendet werden müssen und insbesondere welche Parameter damit modifiziert werden, bleibt weiteren Untersuchungen vorbehalten.

In Abbildung 7.9 sind die in Simulationen ermittelten Kriechkurven den experimentellen Ergebnissen für den Splittmastixasphalt SMA 11 gegenübergestellt. Äquivalent zu den Ergebnissen für den AB 11 können die Kriechverläufe in der Belastungsphase für alle Temperaturen und Belastungsstufen sehr gut wiedergegeben werden. Bei einer Temperatur von -10°C werden auch die Entlastungspfade sehr gut approximiert. Es zeigt sich jedoch bereits, dass die Neigung der Kriechkurve am Versuchsende nicht den Neigungen der experimentellen Kurven entspricht und sich somit bei einem längeren Untersuchungszeitraum kleinere bleibende Dehnungsanteile einstellen. Für höhere Temperaturen nimmt dieser Effekt weiter zu. So ist die Anpassung an den Entlastungspfad für eine Temperatur von 20°C nur unzureichend. Äquivalent zum AB 11 kann eine bessere Anpassung durch die Erweiterung des fraktionalen Maxwell-Modells der Bindemittelkomponente auf ein fraktionales Burger-Modell erreicht werden. Die dazu notwendigen Untersuchungen und Anpassungen sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

7.5 Variation der Volumenanteile

Die grundlegende Motivation zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Asphaltmischungen mit der Mischungstheorie ist, dass es über die Variation der Volumenanteile der Einzelkomponenten möglich wird, verschiedene Mischungsverhältnisse mit einem einheitlichen Modell zu beschreiben. Die zuvor beschriebenen, notwendigen Modifikationen sind derart eingeführt, dass diese Möglichkeit weiterhin gegeben ist. Im Folgenden wird der Einfluss der Variation der Volumenanteile anhand exemplarisch ausgewählter einaxialer Versuche untersucht.

Grundlage der Untersuchung sind die in Abschnitt 7.1 eingeführten Asphaltmischungen, die für eine Asphaltbinderschicht (ABi) und eine Asphalttragschicht (ATS) charakteristisch sind, und aus den Komponenten des AB 11 zusammengesetzt sind. Die Mischungsrezeptur der Binderschicht zeichnet sich im Vergleich zum AB 11 durch einen geringeren Bindemittelgehalt bei einem gleichzeitig höheren Mineralstoffanteil aus. Der Porenraum ist für beide Mischungen annähernd identisch. Der Bindemittelgehalt des Tragschichtmaterials ist durch einen nochmals verringerten Bindemittelgehalt gekennzeichnet. Der Mineralstoffanteil des ATS liegt im Vergleich zum ABi nur geringfügig höher, da der Anteil des Porenraums für den ATS größer ist. Die entsprechenden Kennwerte können den Tabellen 7.1 und 7.2 entnommen werden.

Es liegen keine experimentellen Untersuchungen an Proben aus Asphaltbinder- oder Asphalttragschichtmaterial vor. Der Vergleich zum Basismaterial AB 11 kann daher nur phänomenologisch erfolgen. Die Ergebnisse von Simulationen einaxialer Zug-

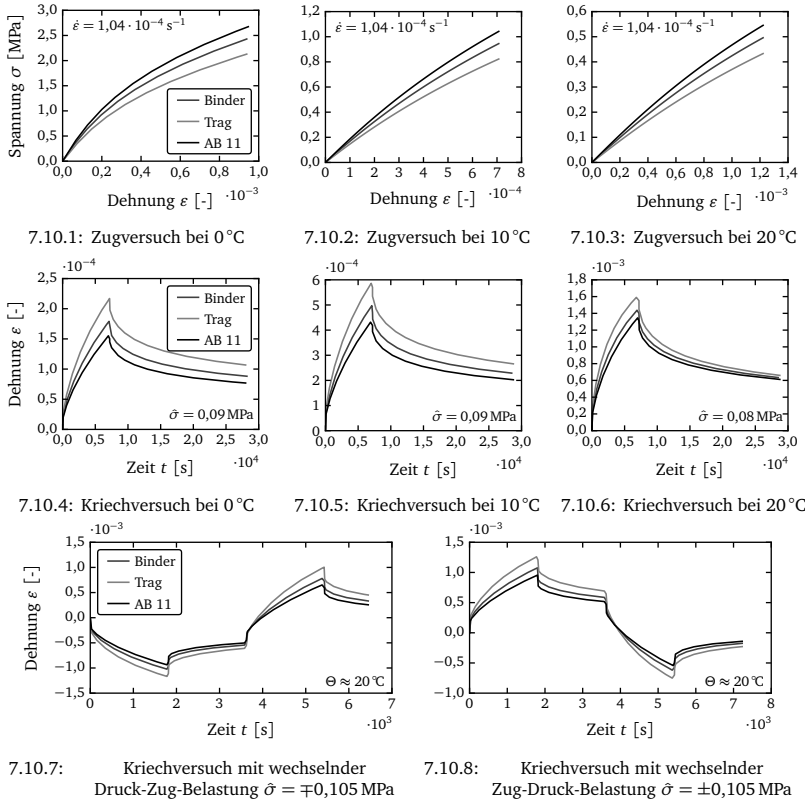


Abbildung 7.10: Simulation einaxialer Versuche bei einer Variation der Volumenanteile

und Kriechversuche mit den Modellparametern des AB 11 unter Verwendung der verschiedenen Volumenanteile sind in Abbildung 7.10 zusammengefasst.

Die Simulation von Zugversuchen bei einer Dehnrates von $\dot{\epsilon} = 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ 1/s}$ (Abbildungen 7.10.1 bis 7.10.3) zeigt, dass die Steifigkeit maßgeblich vom Bindemittelgehalt abhängig ist. Das maximal erreichbare Spannungsniveau ist für den AB 11 am größten, die maximalen Spannungen der ABi und der ATS liegen darunter. Die Anfangssteifigkeit ist bei den untersuchten Temperaturen nahezu identisch, was darauf schließen lässt, dass die Unterschiede im Verformungsverhalten in der Entwicklung viskoser Dehnungsanteile im fraktionalen Element des Maxwell-Modells begründet sind.

In den Abbildungen 7.10.4 bis 7.10.6 sind die Ergebnisse von Simulationen einaxialer Kriechversuche gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die Variation der Volumenanteile das Kriechverhalten beeinflusst. Je höher der Bindemittelgehalt der Asphaltmischung ist, desto ausgeprägter fallen die Kriechverformungen aus. Die Unterschiede im Kriechverhalten nehmen mit zunehmender Temperatur ab. Dies lässt sich mit dem zunehmenden Einfluss der Mineralstoffkomponente bei einer geringeren Festigkeit der Bindemittelkomponente begründen.

Die in den Abbildungen 7.10.7 und 7.10.8 dargestellten Kriechkurven für eine wechselnde Druck-Zug-Belastung zeigen, dass eine Variation der Volumenanteile durch eine Erhöhung des Bindemittelgehalts keinen maßgeblichen Einfluss auf das Druck-Zug-Verhalten hat. Es bestätigt sich, wie schon in den Kriechversuchen zu beobachten ist, dass das Kriechverhalten vom Bindemittelgehalt abhängig ist.

8 Numerische Simulation realer Strukturen

Das modifizierte Mehrkomponentenmodell ermöglicht es, das Spannungs-Deformations-Verhalten realer Strukturen aus Asphaltmaterialien in numerischen Berechnungen mit der Finite-Element-Methode zu untersuchen. Neben der Simulation eines Stempeleindringversuchs wird nachfolgend das thermo-mechanische Verhalten eines Straßenquerschnitts analysiert.

8.1 Stempeleindringversuch

Der dynamische Stempeleindringversuch dient als Laborversuch der Asphalttechnik zur Beurteilung des Verformungsverhaltens von Asphalt unter einer achslastsimulierenden dynamischen Beanspruchung. Bei dem von LEUTNER ET AL. [76] detailliert beschriebenen Versuch wird ein zylindrischer Asphaltprobekörper (\varnothing 200 mm) über einen mittig aufgesetzten Stempel mit einem Durchmesser von 80 mm axial belastet, wobei der zeitliche Verlauf der Belastung einer sinusförmigen Druck-Schwellbeanspruchung entspricht.

Der Versuch wird in der Regel bei hohen Temperaturen um die 50 °C durchgeführt und soll Aufschluss über das Kriechverhalten von Asphaltproben geben. MOLLENHAUER [82] zeigt, dass die Frequenz der sinusförmigen Belastung bei derartigen dynamischen Versuchen nur einen geringen Einfluss auf das Kriechverhalten hat. Es zeigt sich bei der Auswertung von Zug-Schwellversuchen, dass sowohl das Maß der bleibenden Dehnungen als auch der zeitliche Verlauf der Dehnungsentwicklung maßgeblich von der Mittelspannung σ_m abhängen. Das Kriechverhalten wird im Rahmen dieser Arbeit deshalb in Abhängigkeit von einer statischen Belastung untersucht. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die notwendige Diskretisierung des Zeitbereichs vorteilhaft, da somit wesentlich größere Zeitschritte in der numerischen Simulation möglich sind.

Die Simulationen basieren auf dem prinzipiellen Versuchsaufbau des dynamischen Stempeleindringversuchs. Mit Hilfe der Simulationen wird das Kriechverhalten und die aus der Formulierung als Mehrkomponenten-Kontinuum folgende Entwicklung der partiellen Spannungen und inneren Größen untersucht. Die Simulation verschiedener Asphaltmischungen und der Vergleich des zeitabhängigen Verhaltens verdeutlichen den Einfluss der Zusammensetzung der Asphaltmischung auf das Verformungsverhalten.

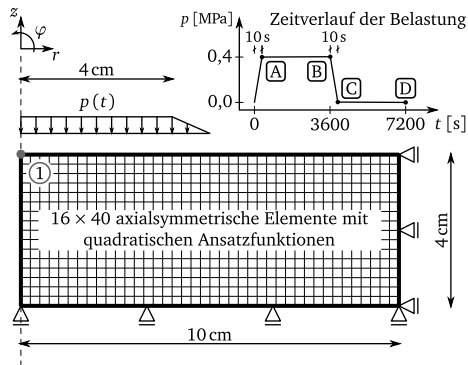


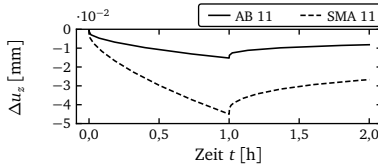
Abbildung 8.1: Systemskizze des statischen Stempel Eindringversuchs

Die Randbedingungen für die Simulation des statischen Stempel Eindringversuchs sind in Abbildung 8.1 dargestellt. Aufgrund der Symmetrie des Probekörpers und der Belastung kann die Struktur über rotationssymmetrische Scheibenelemente diskretisiert werden. Die Probekörpergeometrie ist über 640 Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen erfasst. Der Stempel wird über eine Flächenlast beschrieben, welche im Übergangsbereich linear abgemindert wird, um die Singularitäten im Spannungsverlauf zu minimieren.

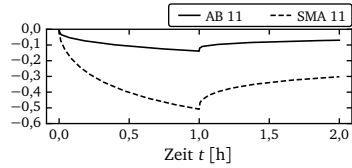
Die Belastung wird innerhalb von zehn Sekunden auf einen Wert von 0,4 MPa gesteigert. Anschließend wird dieses Lastniveau über eine Stunde gehalten, um das Kriechverhalten zu untersuchen. Nach einer Entlastungsphase von zehn Sekunden wird das Relaxationsverhalten über zwei Stunden untersucht. Die signifikanten Punkte im Zeitverlauf der Belastung sind gekennzeichnet, um eine eindeutige Zuordnung bei der Auswertung der Ergebnisse zu ermöglichen:

- Ⓐ Ende der Laststeigerung bei 10 s
- Ⓑ Ende der Kriechphase bei 3600 s
- Ⓒ Ende der Entlastung bei 3610 s
- Ⓓ Ende der Relaxationsphase bei 7200 s

Das Verformungsverhalten beim statischen Stempel Eindringversuch wird zunächst für den Asphaltbeton AB 11 sowie den Splittmastixasphalt SMA 11 simuliert. Die Entwicklung der Verschiebungen, der Spannungen und inneren Größen über den Zeitverlauf sind für den an der Oberkante auf der Symmetrieachse liegenden Punkt ① aufgezeichnet. Der zeitliche Verlauf einiger ausgewählter signifikanter Größen ist für diesen Punkt für die Temperaturen 0 °C und 20 °C gegenübergestellt.



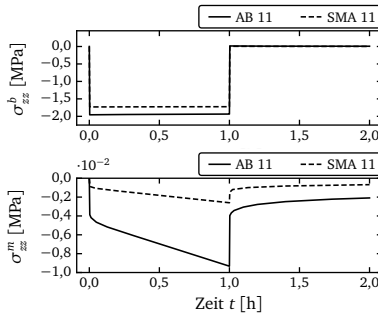
8.2.1: Verschiebung bei $\Theta = 0^\circ\text{C}$



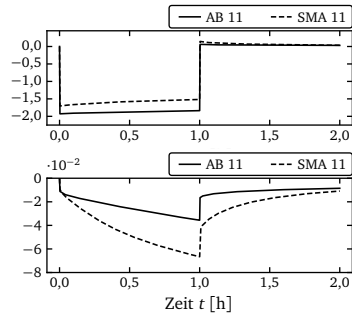
8.2.2: Verschiebung bei $\Theta = 20^\circ\text{C}$

Abbildung 8.2: Vergleich der Verschiebung in der Symmetrieachse für die Stempeleindringversuche am AB 11 und SMA 11

Die in Abbildung 8.2 dargestellten Verschiebungen Δu_z des Punktes ① zeigen, dass der SMA 11 ein deutlich ausgeprägteres Kriechverhalten als der AB 11 aufweist, was mit dem höheren Bindemittelanteil begründet werden kann. Die Simulationen geben das mit steigender Temperatur anwachsende Kriechvermögen wieder. Die Kurven zeigen keinen signifikanten Unterschied in der Größe der elastischen Anteile. Die Verschiebungen am Ende des Versuchs stellen für keinen der Asphalte die endgültige Verformung dar, da die Relaxation zu diesem Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen ist.



8.3.1: Partialspannung bei $\Theta = 0^\circ\text{C}$



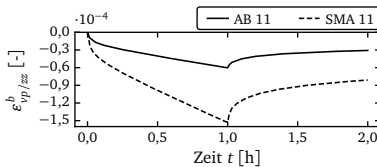
8.3.2: Partialspannung bei $\Theta = 20^\circ\text{C}$

Abbildung 8.3: Vergleich der Partialspannung in der Symmetrieachse für die Stempeleindringversuche am AB 11 und SMA 11

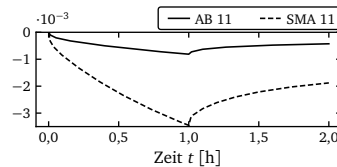
Der Verlauf der Partialspannungen σ_{zz}^b und σ_{zz}^m ist in Abbildung 8.3 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Partialspannungen der Bindemittelkomponente für beide Temperaturen deutlich größer sind als die Partialspannungen der Mineralstoffkomponente. Bei einer Temperatur von 0°C (Abbildung 8.3.1) erfolgt der Lastabtrag hauptsächlich über die Bindemittelkomponente. Der Verlauf der Bindemittelspannungen entspricht hier dem Verlauf der äußeren Last, wobei sich die Partialspannung über den Volumenanteil zu $\sigma^b \approx \frac{\sigma}{n^b}$ ergibt. Die Partialspannungen der Mineralstoffkomponente

steigen innerhalb der Kriechphase an, sind jedoch deutlich zu klein, um im Verlauf der Bindemittelspannungen entscheidende Veränderungen hervorzurufen.

Bei 20 °C ist das Bindemittel wesentlich weicher, es zeigt sich hier, dass die sich entwickelnden Partialspannungen des Mineralstoffs mit fortschreitender Zeit zum Lastabtrag beitragen und somit die Spannungen in der Bindemittelkomponente leicht zurückgehen. Nach der Entlastung stellen sich Zugspannungen im Bindemittel ein, welche mit abklingender Mineralstoffspannung ebenfalls abnehmen. Es zeigt sich, dass die Mineralstoffspannungen des SMA 11 größer sind als die des AB 11, da der Mineralstoff bei einem höheren Bindemittelanteil verbunden mit der geringen Steifigkeit des Bindemittels im Bereich hoher Temperaturen einen größeren Beitrag zum Lastabtrag leisten muss.



8.4.1: Visko-plastische Dehnung bei $\Theta = 0^\circ\text{C}$



8.4.2: Visko-plastische Dehnung bei $\Theta = 20^\circ\text{C}$

Abbildung 8.4: Vergleich der visko-plastischen Dehnung des Bindemittels in der Symmetrieachse für die Stempleindringversuche am AB 11 und SMA 11

Der in Abbildung 8.4 dargestellte Verlauf der visko-plastischen Dehnungen $\varepsilon_{vp/zz}^{(b)}$ charakterisiert das viskose Verhalten der Bindemittelkomponente und somit auch das des Verbundmodells. Bei einer Temperatur von 0 °C folgt einer kurzen primären Kriechphase, bei der die Kriechgeschwindigkeit nichtlinear abnimmt, eine ausgeprägte sekundäre Kriechphase mit konstanter Dehngeschwindigkeit. Dieses Verhalten kann bei beiden simulierten Asphaltmischungen beobachtet werden.

Die Entlastungsphase ist durch einen nichtlinearen Verlauf der visko-plastischen Dehnungen geprägt. Bei 20 °C stellen sich aufgrund der geringeren Viskosität wesentlich größere visko-plastische Dehnungen ein. Bei dieser Temperatur ist der Unterschied zwischen den Asphaltmischungen wesentlich ausgeprägter als bei 0 °C. Der Bereich unter Last bis zum Zeitpunkt $\boxed{\text{B}}$ ist für beide Asphalte durch eine nichtlineare Kurve bestimmt, sekundäres Kriechen findet kaum statt.

Die Darstellung von Ergebnissen in Konturbildern ermöglicht es, über die räumliche Verteilung der betrachteten Größen Rückschlüsse auf die Tragwirkung zu ziehen. Die folgende Analyse bezieht sich zunächst auf den Stempleindringversuch am SMA 11 bei 20 °C. Die Verteilung der Gesamtspannungskomponenten ändert sich aus Gleichgewichtsgründen im Verlauf der Belastung nicht. Nach der Entlastung ergeben sich die Gesamtspannungen im Gegensatz zu den Partialspannungen der

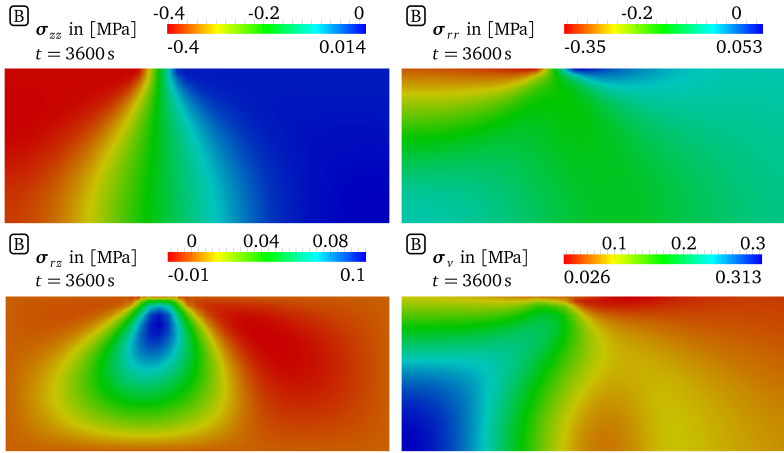


Abbildung 8.5: Komponenten der Gesamtspannung für den Stempleindringversuch für SMA 11 bei 20°C

Einzelkomponenten über das gesamte Berechnungsgebiet zu null. Zur Bewertung des äußeren Lastabtrags reicht es daher, die Verteilung der Gesamtspannungen zum Zeitpunkt **[B]** zu analysieren.

In Abbildung 8.5 sind die maßgeblichen Komponenten der Gesamtspannung sowie die Vergleichsspannung nach VON MISES zum Zeitpunkt **[B]** dargestellt. Die Spannung in Tiefenrichtung σ_{zz} charakterisiert den Lastabtrag in z -Richtung. Unter dem Stempel stellen sich in radialer Richtung Druckspannungen ein. Neben dem Stempel treten Zugspannungen in Ringrichtung auf. Die Gesamtschubspannungen σ_{rz} haben im Bereich des Lastübergangs ihr Maximum. Die Vergleichsspannung σ_v hat ihr Maximum in der Mitte des Probekörpers am unteren Auflager. Da diese Vergleichsspannung die Entwicklung der visko-plastischen Dehnungen der Bindemittelkomponente bestimmt, liegt in diesem Bereich das Maximum der visko-plastischen Dehnungen.

Die Entwicklung der Vergleichsgröße

$$\varepsilon_{vp/v}^b = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr} \left(\left(\varepsilon_{vp}^b \right)^2 \right)}$$

der visko-plastischen Dehnungen im Bindemittel ist in Abbildung 8.6 dargestellt. Zum Zeitpunkt **[B]** stellt sich neben dem Maximum im Zentrum des Probekörpers eine Zone maximaler Vergleichsdehnungen im Bereich der maximalen Schubspannungen ein. Während sich in der Entlastungsphase keine Änderung in der Vergleichsdehnung ergibt, sinkt die Vergleichsdehnung bis zum Zeitpunkt **[D]** ab. Die bleibenden Deh-

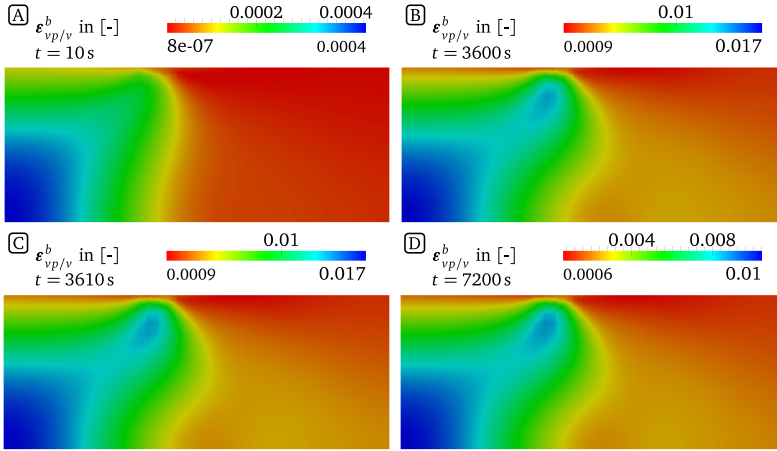


Abbildung 8.6: Vergleichswert der plastischen Dehnung in der Bindemittelkomponente für den Stempeleindringversuch am SMA 11 bei 20 °C

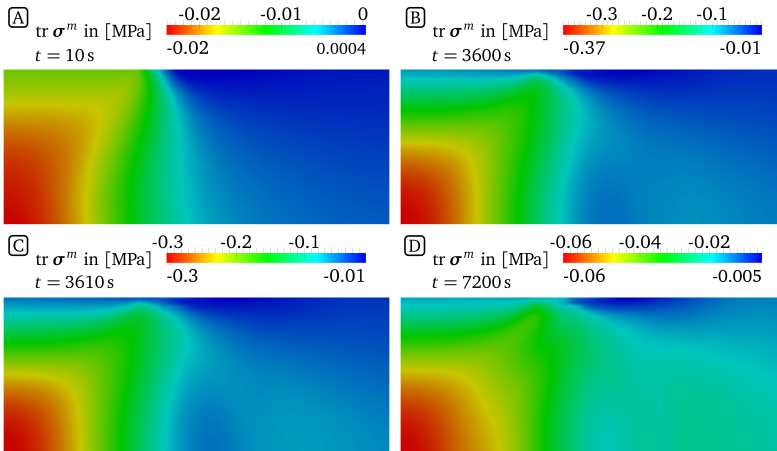


Abbildung 8.7: Spur der Mineralstoffspannung für den Stempeleindringversuch am SMA 11 bei 20 °C

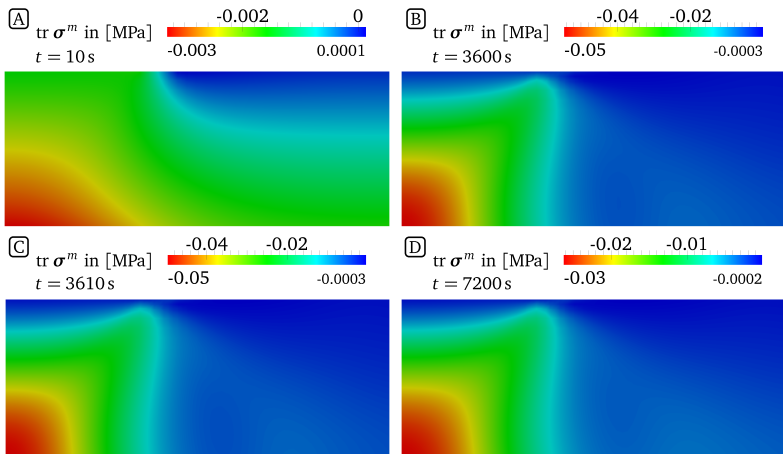


Abbildung 8.8: Spur der Mineralstoffspannung für den Stempelindringversuch am SMA 11 bei 0 °C

nungen am Ende der Simulation konzentrieren sich im zentralen Bereich sowie im Bereich der zum Zeitpunkt **(B)** maximalen Schubspannungen.

Die Entwicklung der Partialspannungen der Mineralstoffkomponente ist maßgeblich von der Spur der Partialspannungen $\text{tr } \sigma^m$ abhängig, welche in Abbildung 8.7 für den SMA 11 bei 20 °C dargestellt ist. Die Spur der Mineralstoffspannungen ist zum Zeitpunkt **(A)** sehr klein. Im Verlauf der konstanten Lastphase kommt es zu inneren Spannungsumlagerungen. Die Spur der Spannungen steigt insbesondere im zentralen Bereich deutlich an. Nach der Entlastung verringert sich $\text{tr } \sigma^m$ spontan. Zum Zeitpunkt **(D)** verbleiben innere Zwangsspannungszustände.

Das Materialmodell der Mineralstoffkomponente beschreibt das temperaturunabhängige Verhalten von granularen Medien. Im Verbundmodell ist die Entwicklung der Mineralstoffspannungen aufgrund der Interaktion mit der Bindemittelkomponente und der eingeführten Modifikationen temperaturabhängig. Der Verlauf von $\text{tr } \sigma^m$ bei einer Temperatur von 0 °C unterscheidet sich grundlegend vom Verlauf bei 20 °C. Abbildung 8.8 zeigt, dass die Spur der Mineralstoffspannungen bei 0 °C wesentlich geringer ist und sich auf einen kleineren, zentralen Bereich am Boden des Probekörpers konzentriert.

Die aus einer Simulation für den AB 11 bei einer Temperatur von 20 °C berechnete Spur der Mineralstoffspannungen ist zum Vergleich in Abbildung 8.9 dargestellt. Die Verteilung zum Zeitpunkt **(A)** gleicht der Verteilung der Gesamtspannungen in Tiefenrichtung. Das Spannungsniveau der Partialspannungen im Mineralstoff ist jedoch

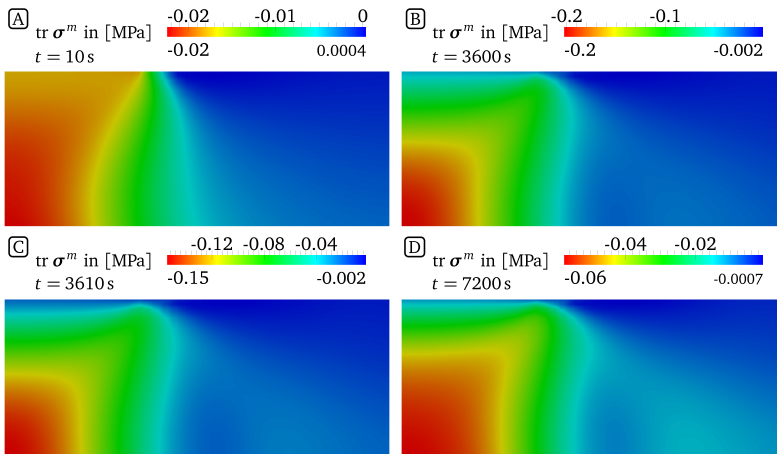


Abbildung 8.9: Spur der Mineralstoffspannung für den Stempелеindringversuch am AB 11 bei 20 °C

wesentlich kleiner als das Gesamtspannungsniveau. Im weiteren Zeitverlauf ergeben sich ähnliche Verteilungen wie für den SMA 11 bei 20 °C, die maximalen Werte von $\text{tr } \sigma^m$ sind jedoch um den Faktor zwei kleiner. Die Verteilung zum Zeitpunkt (D) ist bei einer gleichen Größenordnung der maximalen Werte auf einen größeren Bereich ausgedehnt.

Die kombinierte Tragwirkung des Verbundmodells kann über den Vergleich der Partialspannungen der Einzelkomponenten charakterisiert werden. Besonders aussagekräftig ist der Vergleich der mit den Volumenanteilen gewichteten Partialspannungen $n^\alpha \cdot \sigma^\alpha$. Die Partialspannungen sind nachfolgend in einer Projektion gegenübergestellt, um einen direkten Vergleich der Größenordnung zu ermöglichen.

Abbildung 8.10 stellt die Projektion der gewichteten Partialspannungen für eine Simulation mit dem SMA 11 bei 20 °C dar. Die Auswertung erfolgt für die Zeitpunkte (A), (B) und (C), dargestellt sind die Komponenten der Partialspannungen in Tiefenrichtung z , um den Lastabtrag beurteilen zu können. Direkt nach dem Aufbringen der Last stellt sich eine Verteilung der Partialspannungen ein, bei der die gewichteten Partialspannungen der Bindemittelkomponente der Gesamtspannungsverteilung nahezu entsprechen. Der Anteil der Mineralstoffspannungen ist über das gesamte Gebiet nahezu null. Die Tragfähigkeit der Mineralstoffe kann aufgrund des geringen Dehnungsniveaus nicht aktiviert werden.

Während der Belastungszeit mit einer konstanten Last bis zum Zeitpunkt (B) kommt es zu Spannungsumlagerungen, bei denen die Tragfähigkeit der Mineralstoffkomponente

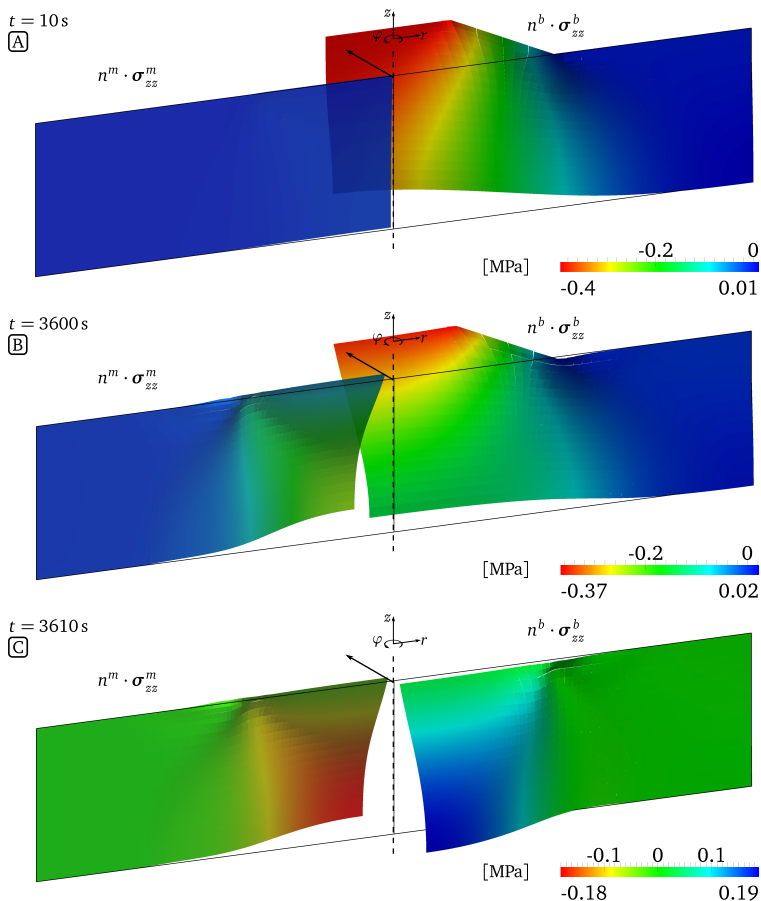


Abbildung 8.10: Verlauf der gewichteten Partialspannung in Tiefenrichtung z für den Stempeleindringversuch am SMA 11 bei 20 °C

aktiviert wird. Insbesondere im mittleren, zentralen Bereich des Probekörpers steigen die gewichteten Mineralstoffspannungen und können einen entscheidenden Beitrag zum Lastabtrag leisten. Die Tragfähigkeit wird hierbei in dem Bereich aktiviert, in dem die Spur der Mineralstoffspannungen (vgl. Abbildung 8.7) und die viskoelastischen Vergleichsdehnungen (vgl. Abbildung 8.6) maximale Werte annehmen.

Direkt nach der Entlastung stellen sich zum Zeitpunkt **C** Zugspannungen im Bindemittel ein, welche das innere Gleichgewicht bei verschwindender äußerer Last

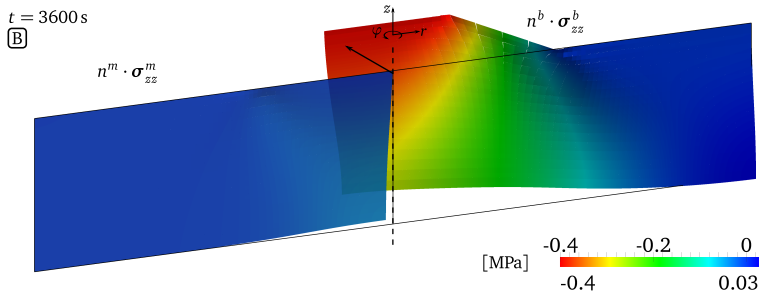


Abbildung 8.11: Gewichtete Partialspannung in Tiefenrichtung z für den Stempeleindringversuch am SMA 11 bei 0°C

erfüllen. Es zeigt sich hierbei, dass die Mineralstoffspannungen während der Entlastungsphase im Gegensatz zu den gewichteten Bindemittelspannungen nahezu unverändert bleiben. Dies deutet auf einen direkten Zusammenhang zwischen den Mineralstoffspannungen und den visko-plastischen Dehnungen im Bindemittel hin, da diese ebenfalls direkt nach der Entlastung nahezu unverändert bleiben, vgl. Abbildung 8.6.

Die Simulation des Stempeleindringversuchs für den SMA 11 (Abbildung 8.11) zeigt, dass bei einer Temperatur von 0°C die Mineralstoffkomponente zum Zeitpunkt (B) einen wesentlich geringeren Beitrag zum Lastabtrag leistet als bei einer Temperatur von 20°C. Dies kann vor allem mit dem bei tiefen Temperaturen wesentlich steiferen und weniger viskosen Materialverhalten der Bindemittelkomponente begründet werden. Die visko-plastischen Dehnungsanteile und insbesondere die für die Mineralstoffkomponente wesentlichen Gesamtdehnungen fallen deutlich geringer aus. Dadurch kann die mit zunehmender Dehnung wachsende Steifigkeit der Mineralstoffkomponente nicht ausreichend aktiviert werden.

Der Vergleich der gewichteten Partialspannungen kann die Unterschiede im Tragverhalten der Asphaltmaterialien AB 11 und SMA 11 besonders gut verdeutlichen. Abbildung 8.12 zeigt die gewichteten Partialspannungen der Bindemittelkomponente für Simulationen am AB 11 und SMA 11 bei 20°C. Zum Zeitpunkt (A) entsprechen die gewichteten Partialspannungen der Bindemittelkomponente in Tiefenrichtung für beide Asphaltmischungen nahezu dem Verlauf der Gesamtspannungen. Der Lastabtrag erfolgt sowohl für den AB 11 als auch für den SMA 11 maßgeblich über das Bindemittel. Die in Abbildung 8.13 dargestellten Partialspannungen der Mineralstoffkomponente sind sehr klein, fallen jedoch für den SMA 11 geringfügig höher aus.

Im Verlauf der konstanten Belastung wachsen die Mineralstoffspannungen für beide Asphaltwerkstoffe an, während unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingung die

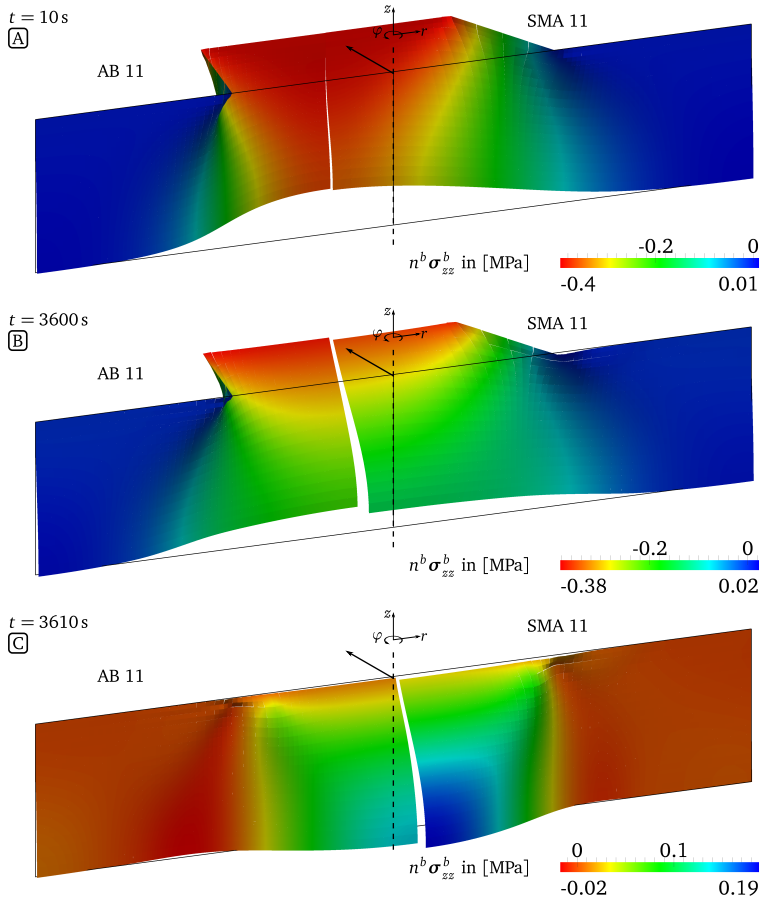


Abbildung 8.12: Vergleich der gewichteten Partialspannung im Bindemittel für die Stempelleindringversuche bei 20 °C

Bindemittelspannungen sinken. Der Mineralstoff trägt zum Zeitpunkt [B] bei einer Temperatur von 20 °C maßgeblich zum Lastabtrag bei. Es zeigt sich jedoch, dass im Bereich der Lasteinleitung unter dem Stempel der Lastabtrag weiterhin maßgeblich über das Bindemittel erfolgt, da sich die Mineralstoffspannungen vom zentralen Auflagerbereich aus entwickeln.

Die Mineralstoffspannungen sind zum Zeitpunkt [B] bei der betrachteten Temperatur von 20 °C für den Splittmastixasphalt höher. Hier kann aufgrund des höheren Binde-

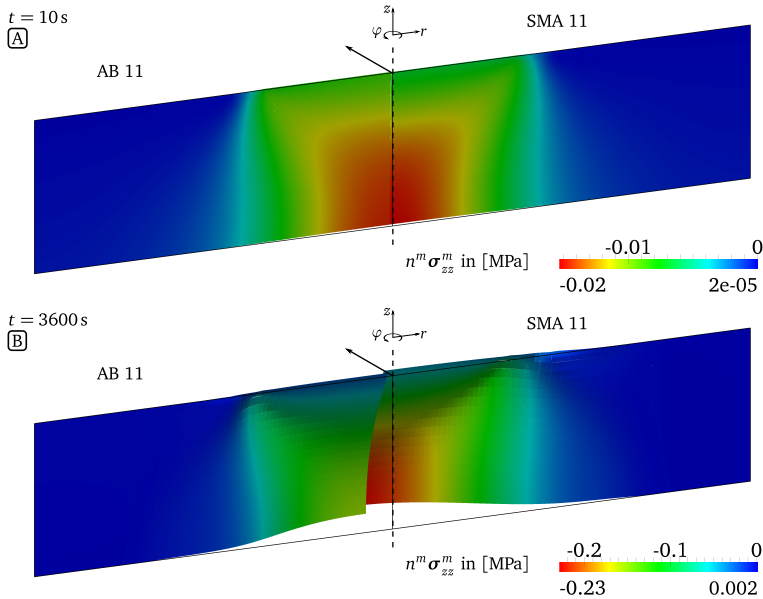


Abbildung 8.13: Vergleich der gewichteten Partialspannung im Mineralstoff für die Stempeleindringversuche bei 20 °C

mittelgehalts und der geringeren Viskosität des Verbundmaterials der Mineralstoff stärker zum Lastabtrag beitragen.

Während der Entlastung bleiben die Partialspannungen der Mineralstoffkomponente auf einem ähnlichen Niveau. Aus Gleichgewichtsgründen entwickeln sich Zugspannungen in der Bindemittelkomponente.

Der Vergleich der gewichteten Partialspannung in der Bindemittelkomponente, welche aus Simulationen des Stempeleindringversuchs am AB 11 und SMA 11 bei 0 °C resultieren, ist in Abbildung 8.14 dargestellt. Es zeigt sich, dass bei tiefen Temperaturen aufgrund der steiferen Bindemittelkomponente der Anteil des Mineralstoffs am Lastabtrag bei beiden Asphalten signifikant kleiner ausfällt als bei hohen Temperaturen. Am Ende der Laststeigerungsphase zum Zeitpunkt A sind die Bindemittelspannungen beider Asphalte identisch und entsprechen dem Gesamtspannungsverlauf in Tiefenrichtung. Die in Abbildung 8.15 dargestellten Partialspannungen der Mineralstoffkomponente sind annähernd null.

Im Verlauf der Belastung entwickeln sich die Mineralstoffspannungen äquivalent zur Simulation bei 20 °C vom zentralen Auflagerbereich aus. Sie sind aufgrund

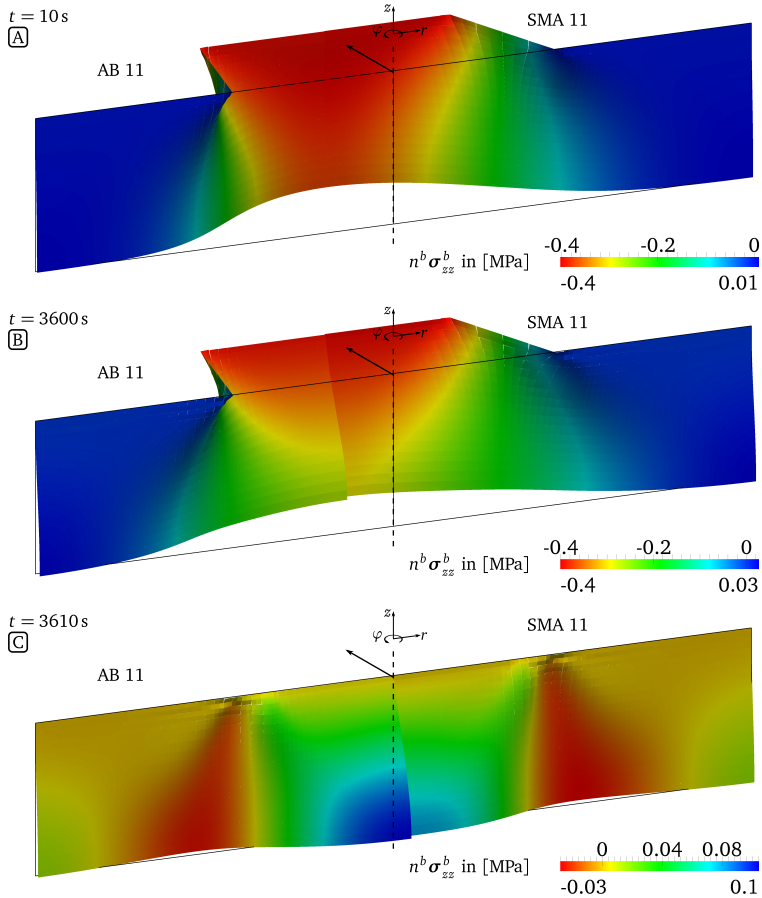


Abbildung 8.14: Vergleich der gewichteten Partialspannung im Bindemittel für die Stempeleindringversuche bei 0 °C

der kleineren Dehnungen wesentlich geringer als bei höheren Temperaturen. Im Gegensatz zur Simulation bei 20 °C sind die Mineralstoffspannungen zum Zeitpunkt **B** im Asphaltbeton AB 11 größer als im SMA 11. Der höhere Bindemittelanteil beim SMA 11 führt bei einer gleichzeitig höheren Steifigkeit und Viskosität des Bindemittels dazu, dass die Lastumlagerung auf die Mineralstoffkomponente weniger ausgeprägt ist.

Direkt nach der Entlastung stellen sich äquivalent zu den Simulationen bei einer

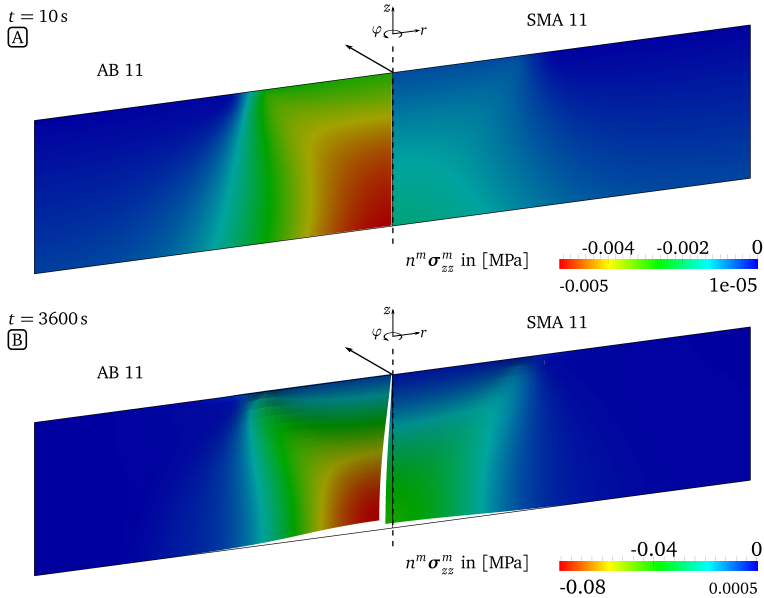


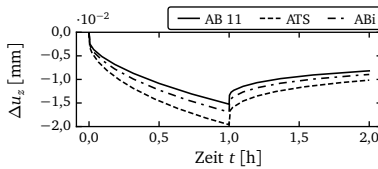
Abbildung 8.15: Vergleich der gewichteten Partialspannung im Mineralstoff für die Stempleindringversuche bei 0 °C

Temperatur von 20 °C Zugspannungen in der Bindemittelkomponente ein, welche im weiteren Verlauf relaxieren. Die Mineralstoffspannungen verändern sich dagegen nur geringfügig.

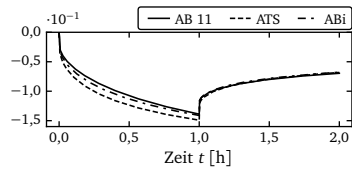
8.1.1 Einfluss der Variation der Volumenanteile

Der Einfluss einer Variation der Volumenanteile ist in Simulationen des Stempleindringversuchs für verschiedene Asphaltmischungen untersucht, vgl. Abschnitt 7.1. Der in Abbildung 8.16.1 dargestellte Verlauf der Verschiebung des Punktes ① bei 0 °C zeigt, dass der Bindemittelgehalt für diese Temperatur maßgebend für die Größe der Verschiebungen ist. Die Verschiebungen steigen mit abnehmendem Bindemittelgehalt an, da der Mineralstoff aufgrund der kleinen Dehnungen wenig zum Lastabtrag beiträgt und sich somit bei einem geringeren Bindemittelgehalt höhere Partialspannungen mit größeren Verschiebungen einstellen.

Bei einer Temperatur von 20 °C (vgl. Abbildung 8.16.2) stellen sich bei allen drei Asphaltmischungen nahezu identische Verschiebungen ein, hier trägt der Mineralstoff



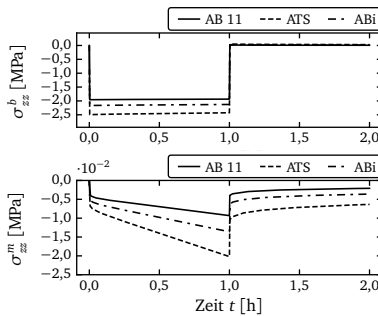
8.16.1: Verschiebung bei $\Theta = 0^\circ\text{C}$



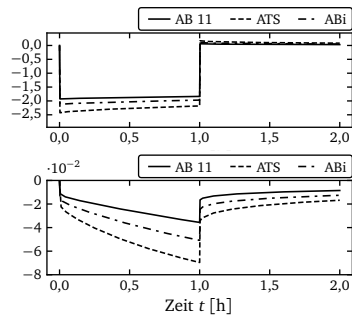
8.16.2: Verschiebung bei $\Theta = 20^\circ\text{C}$

Abbildung 8.16: Vergleich der Verschiebung in der Symmetrieachse für die Stempleindringversuche am AB 11, ATS und ABi

aufgrund der höheren erreichten Dehnungen stärker zum Lastabtrag bei und der Einfluss des Bindemittelgehalts auf die Größe der Verschiebungen verringert sich. In der lastfreien Phase stellen sich für alle Asphaltmischungen identische bleibende Verschiebungen ein.



8.17.1: Partialspannung bei $\Theta = 0^\circ\text{C}$

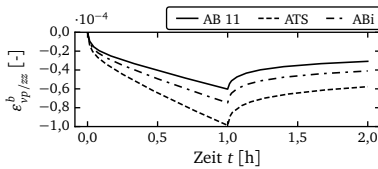


8.17.2: Partialspannung bei $\Theta = 20^\circ\text{C}$

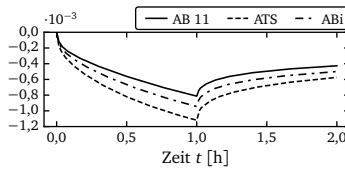
Abbildung 8.17: Vergleich der Partialspannung in der Symmetrieachse für die Stempleindringversuche am AB 11, ATS und ABi

Der in Abbildung 8.17 dargestellte Vergleich der Partialspannungen bestätigt, dass der Mineralstoff bei 0°C nur im geringen Maße am Lastabtrag beteiligt ist. Der Verlauf der Spannungen der Bindemittelkomponente entspricht nahezu dem Verlauf der aufgetragenen äußeren Spannungen. Die Partialspannungen der Mineralstoffkomponente sind sehr klein und nehmen in der Entlastungsphase linear zu. Die Mineralstoffspannungen steigen mit abnehmendem Bindemittelgehalt. Bei einer Temperatur von 20°C kann insbesondere für die ATS ein zunehmender Anteil am Lastabtrag beobachtet werden.

Die Entwicklung der visko-plastischen Dehnungen der Bindemittelkomponente ist in Abbildung 8.18 dargestellt. Der Vergleich der Ergebnisse für die Asphalte AB 11, ATS und ABi zeigt, dass bei einer Temperatur von 0°C die Entwicklung der visko-



8.18.1: Visko-plastische Dehnung bei $\Theta = 0^\circ\text{C}$



8.18.2: Visko-plastische Dehnung bei $\Theta = 20^\circ\text{C}$

Abbildung 8.18: Vergleich der visko-plastischen Dehnung des Bindemittels in der Symmetrieachse für die Stempelleindringversuche am AB 11, ATS und ABi

plastischen Dehnungsanteile nach einer anfänglichen primären Kriechphase nahezu linear verläuft. Dieser Verlauf ist unabhängig vom Bindemittelanteil, die Größe der zum Zeitpunkt (B) erreichten visko-plastischen Dehnungen in Tiefenrichtung nimmt jedoch mit abnehmendem Bindemittelanteil zu. Bei einer Temperatur von 20°C zeigt sich, dass die Entwicklung der visko-plastischen Dehnungen nichtlinear verläuft. Die Größe der visko-plastischen Dehnungen steigt, der Unterschied zwischen den verschiedenen Asphaltmischungen nimmt dabei ab.

8.1.2 Einfluss der reduzierten Integration

Die in den vorherigen Abschnitten dargestellten Ergebnisse werden mit Hilfe der in Abschnitt 4.2 vorgestellten modifizierten reduzierten Integration ermittelt. Durch die Anwendung dieser Methode können volumetrische Lockingeffekte und Spannungsozillationen wirkungsvoll verhindert werden.

Abbildung 8.19 stellt die ermittelten Spannungsergebnisse für den Asphaltbeton AB 11 bei einer Temperatur von 20°C den Ergebnissen einer Simulation mit der vollständigen Integration gegenüber. Während sich bei der Verwendung der modifizierten reduzierten Integration glatte Spannungsverläufe einstellen, treten bei der Berechnung mit der vollständigen Integration starke Spannungsozillationen auf. Insbesondere am Ende der Entlastungsphase führen diese Oszillationen zu wechselnden Vorzeichen der Spannungen innerhalb eines Elements.

Die glatten Spannungsverläufe bei Verwendung der modifizierten reduzierten Integration geben nicht nur die Realität wesentlich besser wieder. Vielmehr ist die numerische Stabilität des modifizierten Verfahrens wesentlich höher, da die Oszillationen mit wechselnden Vorzeichen innerhalb eines Elements bei der vollständigen Integration die Konvergenzrate aufgrund der komplexen Materialformulierung mit unterschiedlichem Verhalten im Druck- und Zugbereich negativ beeinflussen.

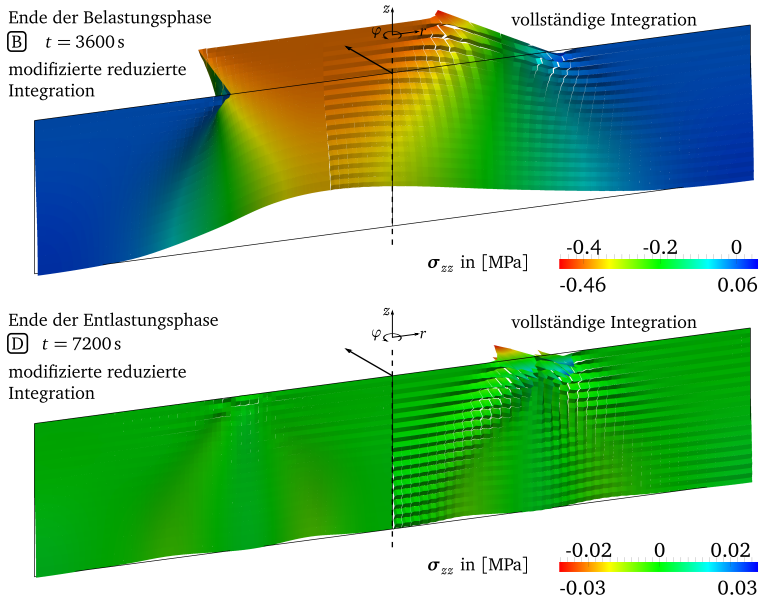


Abbildung 8.19: Einfluss der numerischen Integrationsmethode auf die Gesamtspannung beim Stempleindringversuch am AB 11 bei 20 °C

8.2 Straßenkonstruktion

Die numerische Simulation von Laborversuchen wie dem Stempleindringversuch kann dazu beitragen das komplexe Materialverhalten von Asphaltmischungen genauer zu erfassen und deren Zusammensetzung zu optimieren. Für die Praxis ist es relevanter, langfristige Aussagen über das Tragverhalten realer Straßenkonstruktionen mit Hilfe geeigneter Prognosemodelle treffen zu können. Derartige Prognosemodelle für die computergestützte Bemessung und Lebensdaueranalyse von Straßenquerschnitten müssen die geschichtete Konstruktion sowohl geometrisch als auch strukturell berücksichtigen und dabei das komplexe mehrdimensionale Tragverhalten der einzelnen Schichten zutreffend wiedergeben. Das entwickelte Verbundmodell eignet sich in besonderer Weise dafür, da es die bitumengebundenen Schichten einer Straßenkonstruktion mit einem einheitlichen Ansatz beschreiben kann. Darüber hinaus kann das Materialmodell der Mineralstoffkomponente zur Beschreibung des Verformungsverhaltens der ungebundenen Schichten herangezogen werden.

Im Folgenden wird der in Abbildung 8.20 dargestellte Straßenquerschnitt hinsichtlich praktisch relevanter Wärmeeinwirkungen und Belastungen untersucht. Der Straßen-

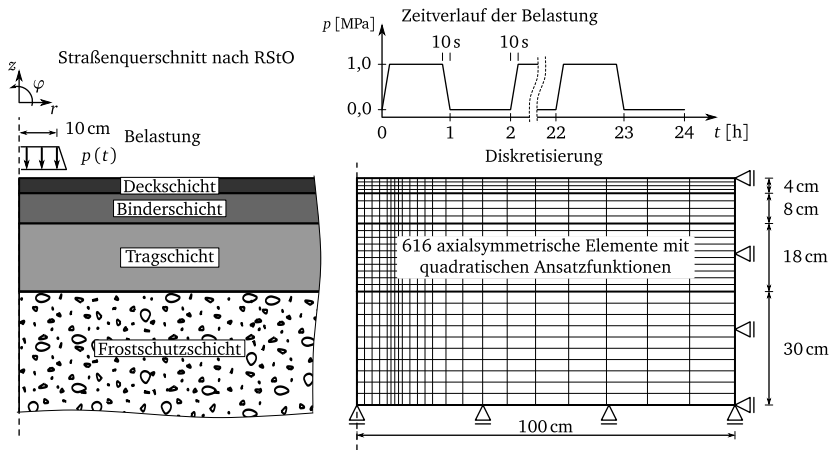


Abbildung 8.20: Straßenquerschnitt nach RStO: Schichtaufbau und Diskretisierung

querschnitt entspricht der RStO 01 [100] und besteht aus den bitumengebundenen Schichten Deck-, Binder- und Asphalttragschicht sowie einer ungebundenen Frostschuttschicht. Die Untersuchungen beschränken sich auf eine Variation der Zusammensetzung der Deckschichten, da lediglich für diese mit experimentellen Untersuchungen begründete Materialparameter vorliegen. Die Materialparameter der Asphaltbinderschicht ABi und der Asphalttragschicht ATS sind entsprechend der in Kapitel 7 begründeten Parameter angesetzt.

Für das Mineralstoffgemisch der ungebundenen Frostschuttschicht liegen keine experimentellen Daten vor. Die notwendigen Modellparameter sind daher entsprechend der Angaben von HERLE [48] äquivalent zu den Parametern eines Kiesgemischs gewählt. Die Parameter des erweiterten Modells sind zunächst entsprechend KUDELLA/REUL [69] angesetzt. In ersten Simulationen zeigt sich, dass die Verformungen in der Frostschuttschicht zu große Werte annehmen. Die Parameter sind deshalb entsprechend modifiziert, um eine grundlegende Verformungsbeständigkeit der ungebundenen Frostschuttschicht in der Simulation zu gewährleisten. Die Modellparameter der Frostschuttschicht sind im Anhang in Tabelle A.2 zusammengefasst.

8.2.1 Temperaturbeanspruchung

Die Ermittlung der Temperaturverteilung ist über das instationäre Wärmeleitungsproblem auf Grundlage der Untersuchungen von POHLMANN [97] und GARTUNG [37] gelöst. Die für die Berechnung notwendigen Materialkennwerte sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst. Die Temperaturrandbedingung in 7,5 m Tiefe ist entsprechend

GARTUNG mit einem über das Jahr konstanten Temperaturwert von $8,5^{\circ}\text{C}$ gegeben. Der Verlauf der Oberflächentemperatur ist auf Grundlage des von POHLMANN bestimmten Tagesgangs für einen repräsentativen Frühlingstag dem Beschreibungsumfang des modifizierten Verbundmodells angepasst. Die Modellparameter des Verbundmodells sind für einen Temperaturbereich von -10°C bis 20°C erfolgreich anhand von experimentellen Untersuchungen identifiziert.

Der Temperaturverlauf an der Oberfläche sowie die aus der Lösung des instationären Wärmeleitungsproblems folgenden Temperaturen an den Schichtgrenzen sind in Abbildung 8.21.1 dargestellt. Für markante Zeitpunkte sind die Temperaturverteilungen über den Querschnitt in Abbildung 8.21.2 gegeben. Es zeigt sich, dass für die Temperaturberechnung die für die Diskretisierung gewählte maximale Tiefe von 60 cm ausreichend ist, da sich bereits in dieser Tiefe eine annähernd konstante Temperatur einstellt.

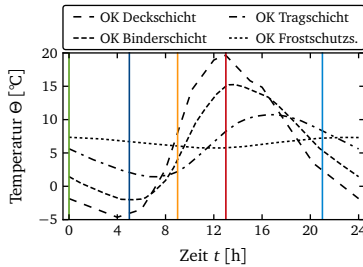
Der ermittelte Temperaturverlauf wird zunächst zur Berechnung der Zwangsspannungen σ_{rr} im Straßenquerschnitt verwendet, welche sich in horizontaler Richtung infolge der volumetrischen Temperaturdehnung ε_{α_T}

$$\varepsilon_{\alpha_T} = \alpha_T \dot{T} \cdot 1 \quad \text{mit } T \text{ in K} \quad (8.1)$$

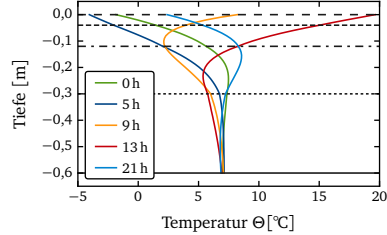
einstellen. Den Temperatúrausdehnungskoeffizienten α_T definiert GARTUNG als nicht-lineare Größe, welche von der Temperatur und dem Bindemittelgehalt des Asphalts abhängig ist. In dieser Arbeit steht die Untersuchung des grundsätzlichen Verformungsverhaltens von Asphaltmischungen im Vordergrund. Eine zusätzliche Nicht-linearität des Temperatúrausdehnungskoeffizienten führt dazu, dass die einzelnen in den Untersuchungen auftretenden Interaktionseffekte nicht klar voneinander getrennt werden können. Zudem ist die Datenbasis für eine nichtlineare Formulierung des Ausdehnungskoeffizienten nicht gegeben. Daher wird für die folgenden Untersuchungen ein einheitlicher Wert von $\alpha_T = 3 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{K}$ für alle Schichten angesetzt. Eine genauere Untersuchung des temperaturabhängigen Dehnungsverhaltens muss in weiterführenden Untersuchungen erfolgen.

	Wärmeleitzahl λ in $[\text{W}/\text{mK}]$	spez. Wärmekapazität c in $[\text{Wh}/\text{kgK}]$	Dichte ρ in $[\text{kg}/\text{m}^3]$
Asphaltdeckschicht	1,4	0,272	2500
Asphaltbinderschicht	1,3	0,269	2450
Asphalttragschicht	1,1	0,269	2350
Frostschuttschicht	2,3	0,269	2000
Untergrund	2,5	0,275	2000

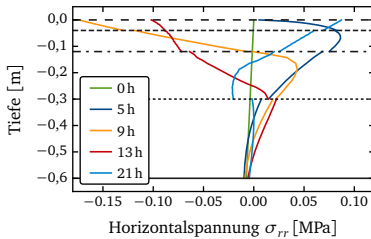
Tabelle 8.1: Modellparameter für die Berechnung der Temperaturverteilung



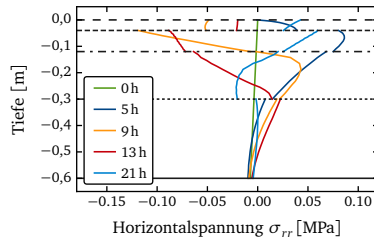
8.21.1: Temperaturverlauf



8.21.2: Temperaturprofil



8.21.3: Deckschicht AB 11



8.21.4: Deckschicht SMA 11

Abbildung 8.21: Temperatur- und Spannungsverläufe

Die Spannungsverteilung über den Straßenquerschnitt ist für die Asphaltbetondeckschicht in Abbildung 8.21.3 dargestellt. Aufgrund der Wahl eines äquivalenten Temperaturexpansionskoeffizienten für alle Schichten können die an den Schichtgrenzen auftretenden Spannungssprünge allein dem verschiedenartigen Materialverhalten der einzelnen Schichten zugeordnet werden. Das Verformungsverhalten der ungebundenen Frostschuttschicht als granulares Medium wird mit Hilfe des erweiterten hypoplastischen Materialmodells bestimmt. Dem Material ist eine Kohäsion zugewiesen, womit die auftretenden Zugspannungszustände in der Frostschuttschicht im Beschreibungsumfang des Materialmodells liegen.

Die an der Schichtgrenze zur Asphalttragschicht ATS auftretenden Spannungsunterschiede sind in der Abkühlphase am Ende des Tagesgangs am größten. Die Spannungsunterschiede an den Schichtgrenzen ATS zu ABi sowie ABi zu AB 11 fallen deutlich kleiner aus, was durch die identischen Modellparameter der Grundkomponenten bei einer alleinigen Änderung der Volumenanteile begründet werden kann. Für den in Abbildung 8.21.4 dargestellten Verlauf der Spannungen für eine Splittmastixdeckschicht zeigt sich, dass die Spannungsunterschiede in horizontaler Richtung an der Grenzschicht ABi zu SMA 11 signifikant größer sind als beim Übergang zur AB 11-Deckschicht. Die maßgeblichen Unterschiede resultieren aus

dem grundsätzlich verschiedenen Verformungsverhalten der Asphalte auf Basis der Materialparameter des AB 11 und dem Splittmastixasphalt SMA 11. Aufgrund der deutlich geringeren Steifigkeit und der höheren Viskosität der Asphaltmischung SMA 11 sind die Zwangsspannungen bei einer identischen Temperaturdehnung wesentlich kleiner.

8.2.2 Kombinierte Beanspruchung

Das Verformungsverhalten des in Abbildung 8.20 dargestellten Straßenaufbaus wird in Simulationen unter einer kombinierten thermo-mechanischen Beanspruchung untersucht. Neben der im vorherigen Abschnitt bestimmten Temperaturverteilung wird der Straßenquerschnitt einer zeitlich veränderlichen Belastung ausgesetzt. Die Belastung ist den Untersuchungen von ASCHENBRENNER [4] folgend über eine Streckenlast approximiert, welche im stündlichen Wechsel zwischen einer Belastungsphase und einer lastfreien Phase über den Tagesverlauf angesetzt ist. Die Flächenlast hat während der Belastungsphase eine Größe von $p = 1,0 \text{ MPa}$ und entspricht somit bei einer kreisförmigen Lastaufstandsfläche von $\varnothing 20 \text{ cm}$ einer Last von $31,4 \text{ kN}$.

Die Simulation wird für Straßenquerschnitte mit einer Asphaltbeton- und einer Splittmastixasphaltdeckschicht durchgeführt. Die berechneten Spannungen in vertikaler und horizontaler Richtung sind in Abbildung 8.22 für den Straßenquerschnitt mit der Deckschicht SMA 11 dargestellt. Hierbei sind die Spannungen für die Zeitpunkte ① und ② im Bereich der tiefsten Temperaturen des Tagesgangs sowie für die Zeitpunkte ③ und ④ im Bereich der maximalen Oberflächentemperaturen ausgewertet. Die Spannungen σ_{zz} in Tiefenrichtung konzentrieren sich am Ende der Belastungsphasen zu den Zeitpunkten ① und ③ auf den Bereich unter der Radlast in den oberen Schichten. Am Ende der Entlastungsphasen zu den Zeitpunkten ② und ④ sind geringe Druckspannungen im zentralen Bereich in der Tragschicht und Zugspannungen im Übergangsbereich der Schichten SMA 11 und ABi zu beobachten.

Die Radialspannungen σ_{rr} konzentrieren sich zum Zeitpunkt ① in der Deckschicht unter der Radlast. Nach der Entlastung ② verbleibt eine maßgeblich durch das Temperaturprofil geprägte Verteilung der radialen Spannungen, welche sich infolge der Temperaturdehnungen einstellen. Aufgrund der plastischen Verformungen im Bereich der Lasteinleitung und der damit verbundenen Interaktionsspannungen weicht der Spannungsverlauf im zentralen Bereich von der in Abbildung 8.21.4 dargestellten gleichmäßigen Verteilung der Zwangsspannungen ab.

Am Ende der 7. Belastungsphase zum Zeitpunkt ③ sind die radialen Spannungen aufgrund der hohen Temperaturen und der damit verbundenen geringeren Steifigkeit kleiner als im Bereich der tiefen Temperaturen. Sie konzentrieren sich im Bereich der Deckschicht, der Einflussbereich der Radialspannungen hat sich im Vergleich zum Zeitpunkt ① bis zur Tragschicht ausgedehnt.

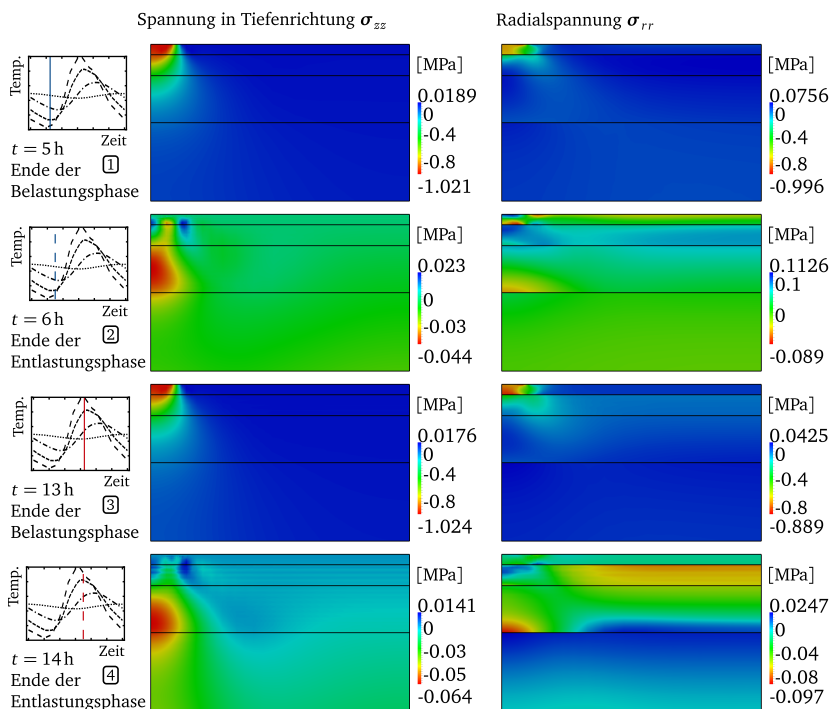


Abbildung 8.22: Spannung in Tiefenrichtung und Radialspannung für den Straßenquerschnitt mit der Deckschicht SMA 11 zu verschiedenen Zeitpunkten

Am Ende der 7. Entlastungsphase entspricht die Verteilung der Zwangsspannungen im äußeren Bereich der Verteilung der Horizontalspannungen, die sich infolge einer reinen Temperaturbeanspruchung über den Querschnitt ergibt. Im zentralen Bereich weichen die Spannungen maßgeblich von dieser Verteilung ab. Hier bestimmt die Verteilung der inneren Partialspannungen der Einzelkomponenten den Verlauf der Radialspannungen maßgeblich.

Die Verteilung der Schubspannungen und der Spur der Mineralstoffspannungen sind in Abbildung 8.23 dargestellt. Die Verteilung der Schubspannungen σ_{rz} am Ende der Belastungszeiten ① und ③ ist nahezu identisch. Die Schubspannungen haben unter Last ein Maximum im Bereich des Lastrandes unterhalb der Schichtgrenze ABi zu AB 11. Der tropfenförmige Verlauf entspricht dem bereits im Stempелеindringversuch beobachteten charakteristischen Verlauf im Lastübergangsbereich, vgl. Abbildung 8.7.

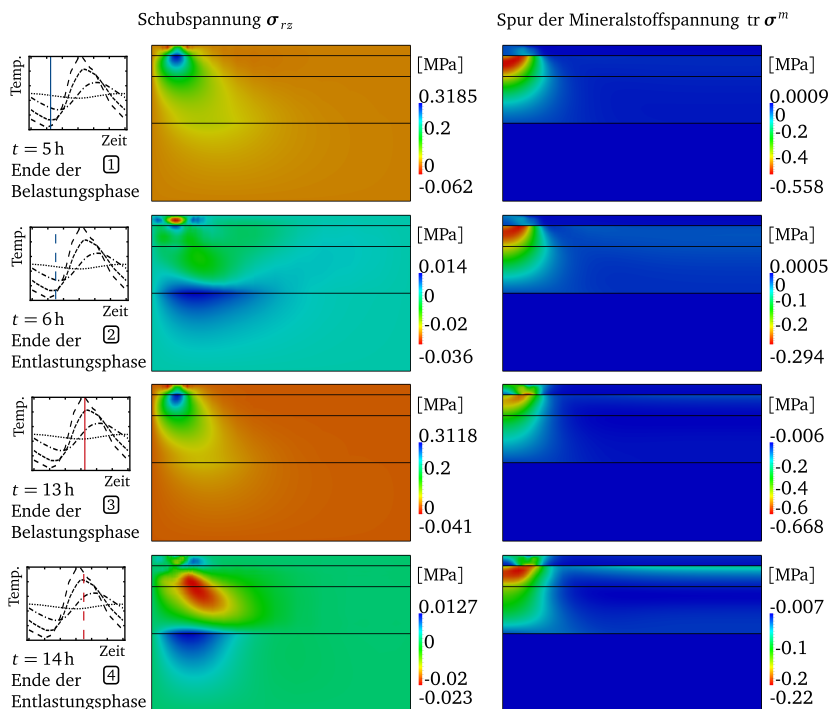


Abbildung 8.23: Schubspannung und Spur der Mineralstoffspannung für den Straßenquerschnitt mit der Deckschicht SMA 11 zu verschiedenen Zeitpunkten

Zu den Zeitpunkten ② und ④ verbleiben im lastfreien Zustand Schubspannungen infolge innerer Größen im Querschnitt. Während die Schubspannungen sich bei tiefen Temperaturen in der Deckschicht konzentrieren, bilden sich zum Zeitpunkt ④ zwei ausgeprägte Zonen mit kleinen Spannungswerten im Übergangsbereich ABI zu ATS und ATS zur Frostschutzschicht aus.

Die maximalen Werte der Spur der Mineralstoffspannungen $\text{tr } \sigma^m$ konzentrieren sich für die Zeitpunkte ① und ② unter der Last und in den unteren Schichten. Aufgrund der geringeren Steifigkeit der mineralischen Zuschläge des SMA 11 sind die Werte von $\text{tr } \sigma^m$ in der Deckschicht wesentlich kleiner als in den darunter liegenden Schichten. Der Verlauf von $\text{tr } \sigma^m$ ändert sich von Zeitpunkt ① zu Zeitpunkt ② nicht, der maximale Wert ist zum lastfreien Zeitpunkt ② kleiner, verschwindet jedoch nicht. Es zeigt sich, wie bereits in den Simulationen des Stempeleindringversuchs zu beobachten ist, dass die lastfreien Zustände maßgeblich von inneren Spannungszuständen geprägt sind.

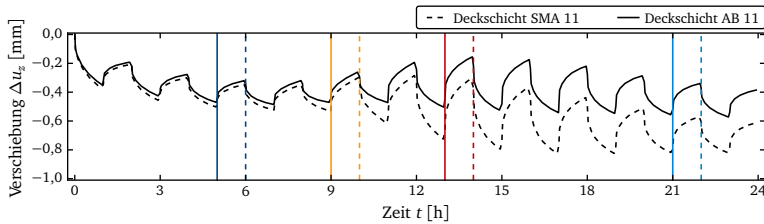


Abbildung 8.24: Verlauf der Verschiebungen an der Oberkante des Straßenquerschnitts für die Deckschichten AB 11 und SMA 11

Im Bereich der hohen Temperaturen zu den Zeitpunkten ③ und ④ zeigt sich ein signifikant anderer Verlauf von $\text{tr } \sigma^m$. Am Ende der 7. Belastungsphase liegen die maximalen Werte im Bereich der Binderschicht und in der Deckschicht. Die charakteristische tropfenförmige Verteilung, wie zu den Zeitpunkten ① und ② zu beobachten war, liegt nicht mehr vor. Am Ende der 7. Entlastungsphase konzentrieren sich die maximalen Werte von $\text{tr } \sigma^m$ auf die Binderschicht.

In Abbildung 8.24 ist der Verlauf der Verschiebungen für den an der Oberkante in der Symmetrieachse liegenden Punkt über den Tagesverlauf dargestellt. Im Anfangsbereich mit tiefen Temperaturen verformen sich die beiden Deckschichten AB 11 und SMA 11 nahezu gleich. Mit steigender Temperatur gehen die Verformungen zurück. Für die Asphaltbetondeckschicht kommt es in den lastfreien Phasen aufgrund der Temperaturdehnungen zu kleiner werdenden Verschiebungen, obwohl sich das Deckschichtmaterial bei höherer Temperatur weniger steif und zunehmend viskos verhält. Im Gegensatz dazu verformt sich die Deckschicht SMA 11 im Bereich der hohen Temperaturen wesentlich stärker. In den Belastungsphasen nehmen die Verschiebungen deutlich zu, es zeigt sich, dass das Deckschichtmaterial SMA 11 im Bereich höherer Temperaturen wesentlich weicher ist als der AB 11.

Die Verformungen der Deckschichten AB 11 und SMA 11 sind für ausgewählte Zeitpunkte des Tagesverlaufs in Abbildung 8.25 gegenübergestellt. Die Darstellung beschränkt sich auf die Deckschicht und berücksichtigt einen Bereich von ca. 20 cm in horizontaler Richtung von der Symmetrieachse aus. Dargestellt ist die verschobene Geometrie, hierbei ist die Asphaltbeton- der Splittmastixasphaltdeckschicht im direkten Vergleich, an der Symmetrieachse gespiegelt, gegenübergestellt.

Die bereits im Verschiebungsverlauf (Abbildung 8.24) zu beobachtenden wesentlich größeren Verformungen der Deckschicht SMA 11 werden in dieser Darstellung besonders verdeutlicht. Es zeigt sich zudem, dass die Verschiebungen für den SMA 11 nicht allein in vertikaler Richtung zunehmen. Vielmehr entzieht sich der im Bereich höherer Temperaturen deutlich weichere SMA 11 der Last und es kommt zu einer seitlichen Verschiebung, welche mit einer Aufwölbung neben der Last verbunden ist.

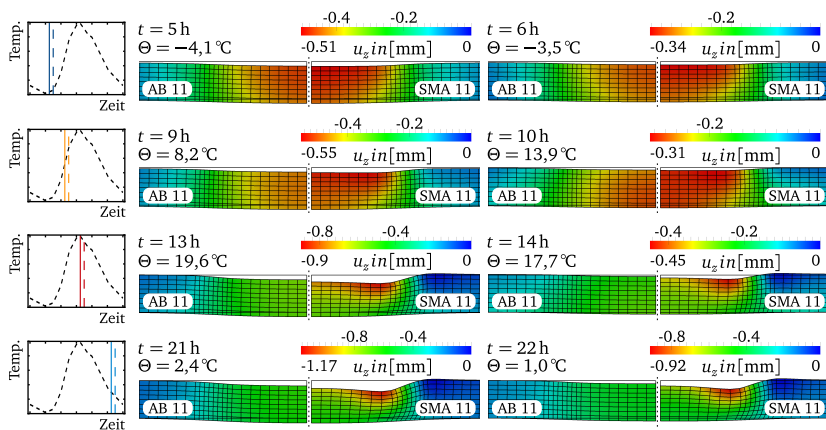


Abbildung 8.25: Vergleich der Verformungen in den Deckschichten AB 11 und SMA 11 für ausgewählte Zeitpunkte

Dieser Effekt tritt bei der Deckschicht AB 11 nicht auf. Sie verhält sich wesentlich steifer mit maßgeblich in vertikaler Richtung verlaufenden Verschiebungen.

Die Phänomenologie des Verformungsverhaltens von Asphaltstraßenquerschnitten kann mit dem modifizierten Verbundmodell bereits sehr gut erfasst werden. Die berechneten Verschiebungswerte sind jedoch mit maximalen Verschiebungen von ca. 1,2 mm für die Deckschicht SMA 11 und ca. 0,6 mm für die Asphaltbetondeckschicht für die gegebene Belastung unter dem gegebenen Temperaturspektrum zu groß. Insbesondere das seitliche Ausweichen der Splittmastixasphaltdeckschicht ist unter realen Bedingungen erst bei deutlich höheren Temperaturen zu beobachten. Die zu großen Verschiebungen in der Simulation können mit dem nicht erfassten Verdichtungszustand im Straßenquerschnitt erklärt werden. Es ist zu vermuten, dass die intensive Verdichtungsarbeit, welche beim Bau von Straßenkonstruktionen erfolgt, zu einer deutlich höheren Steifigkeit führt, als sie mit einaxialen Versuchen an prismatischen Probekörpern erzielt werden kann.

Die Modellparameter des Unterbaus sind im Rahmen dieser Arbeit nicht mit Hilfe experimenteller Versuche ermittelt. Insbesondere der Ansatz der Modellparameter für die Kiesschicht muss überprüft werden. Die Annahme gleicher Modifikationsparameter bei einer alleinigen Änderung der Volumenanteile für die Binderschicht und die Tragschicht muss zudem in experimentellen Untersuchungen bestätigt werden. Weiterführende Untersuchungen müssen zudem klären, inwieweit die bisher nicht im Materialmodell erfasste Klebewirkung die Steifigkeit von Asphaltwerkstoffen beeinflusst.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verbundmodell zur Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens von Asphaltmischungen entwickelt und anhand eines umfangreichen Versuchsprogramms validiert. Das Modell beschreibt das Verformungsverhalten von Asphaltwerkstoffen auf Basis der Mischungstheorie über die Komponenten Bindemittel, Mineralstoff und Porenraum. Die theoretischen Grundlagen des Modellansatzes und der kontinuumsmechanischen Mischungstheorie werden dargestellt. Die Bilanzgleichungen sind in ein gekoppeltes Anfangs-Randwertproblem überführt, welches die Grundlage für die numerische Beschreibung des Verformungsverhaltens von Asphaltmischungen bildet.

Die numerische Lösung des gekoppelten Anfangs-Randwertproblems erfolgt mit der Finite-Element-Methode. Die Leistungsfähigkeit und die Genauigkeit dieses Verfahrens kann mit einem gedämpften Newton-Raphson-Verfahren sowie durch Verwendung der algorithmischen Differentiation in Kombination mit einer selektiv reduzierten Integration deutlich gesteigert werden. Die effiziente Identifikation der Modellparameter auf der Basis eines umfangreichen experimentellen Programms wird durch eine parallelisierte Evolutionsstrategie in Verbindung mit einer eigens entwickelten Datenbankstruktur gewährleistet.

Das ausgeprägte zeit-, temperatur- und spannungsabhängige Verformungsverhalten der Bindemittelkomponente wird mit einem rheologischen Modell beschrieben, welches fraktionale Zeitableitungen beinhaltet. Das mathematisch komplexe Konzept der fraktionalen Zeitableitungen ist mit Hilfe einer Operatorformulierung anschaulich dargestellt. Die Bestimmung der Materialparameter erfolgt anhand eines speziell entwickelten und auf die charakteristischen Eigenschaften des Bindemittels angepassten Versuchsprogramms. Es zeigt sich, dass das visko-plastische Verformungsverhalten der Bindemittelkomponente mit dem rheologischen Modell eines fraktionalen Maxwell-Körpers hinreichend genau beschrieben werden kann.

Das Werkstoffverhalten der Mineralstoffkomponente als granulares Haufwerk wird mit einem Modell der Hypoplastizität erfasst. Die Identifikation der Materialparameter anhand von Standard-Laborversuchen der Geotechnik wird für zwei ausgewählte Gesteinskörnungen durchgeführt. Die Mineralstoffgemische sind hierbei so zusammengestellt, dass sie den zu untersuchenden Asphaltmischungen eines Asphaltbetons AB 11 sowie eines Splittmastixasphalts SMA 11 entsprechen. Das

hypoplastische Materialmodell ist um das Konzept intergranularer Dehnungen erweitert, damit das Verformungsverhalten infolge zyklischer Belastungen beschrieben werden kann.

Zur Validierung des Verbundmodells liegt ein umfangreiches experimentelles Programm vor, bei dem die Asphaltmischungen eines Asphaltbetons AB 11 und eines Splittmastixasphalts SMA 11 in einaxialen Versuchen über ein breites Temperaturspektrum untersucht sind. Der Vergleich der Versuche mit Ergebnissen numerischer Simulationen zeigt, dass das Tragverhalten des Verbundwerkstoffs mit dem zunächst vorgeschlagenen Verbundmodell nur unzureichend beschrieben werden kann. Mit Hilfe physikalisch begründeter Modifikationen ist das Verbundmodell in der Lage, das in den Versuchen beobachtete Verformungsverhalten wiederzugeben. Die Modifikationen sind derart gewählt, dass die Übertragbarkeit auf andere Asphaltmischungen gewährleistet ist.

Das Verbundmodell wird zur Analyse ausgewählter Strukturen unter mechanischer und thermischer Einwirkung eingesetzt. In der Simulation geschichteter Straßenkonstruktionen können sämtliche gebundenen Schichten einheitlich mit dem Verbundmodell beschrieben werden. Zur Beschreibung der ungebundenen Schichten wird das Materialmodell der Mineralstoffkomponente eingesetzt. Das Verbundmodell ist in der Lage, das grundlegend verschiedene Verhalten unterschiedlicher Asphaltmischungen zu erfassen und kann die wesentlichen Phänomene bei der Spurrinnenbildung beschreiben. Die Untersuchung numerischer Simulationen von Stempfeindringversuchen zeigt, dass der Anteil der Mineralstoffkomponente am Lastabtrag zu gering ist.

Obwohl das modifizierte Verbundmodell das in einaxialen Versuchen beobachtete Verformungsverhalten wiedergeben kann und die numerischen Untersuchungen realer Strukturen plausible Ergebnisse liefern, muss das Verbundmodell in seinen wesentlichen Zügen weiterentwickelt werden. Insbesondere müssen die im derzeitigen Modell lediglich über den Ansatz der Dehnungsäquivalenz erfassten Interaktionsbeziehungen zwischen den Einzelkomponenten besser erfasst werden. Die Verbundwirkung zwischen den einzelnen Komponenten des Asphalts muss mikrostrukturell begründet formuliert werden. Für den Einsatz als Prognosemodell zur Lebensdauervorhersage muss das Modell um die Beschreibung von Schädigung und Heilung erweitert werden. Darüber hinaus ist die Erfassung des mehraxialen Verhaltens in zusätzlichen experimentellen Untersuchungen notwendig.

Das Modell sollte um unabhängige Verschiebungsfelder der Einzelkomponenten erweitert werden, um die Beschreibung von Verdichtungs- und Entmischungsvorgängen zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang kann eine Formulierung für die Schädigung des Verbunds in das Modell integriert werden, um dieses wichtige Schädigungsphänomen in der Strukturanalyse berücksichtigen zu können.

Literaturverzeichnis

- [1] ABBAS, A. ; MASAD, E. ; PAPAGIANNAKIS, T. ; HARMAN, T.: Micromechanical Modeling of the Viscoelastic Behavior of Asphalt Mixtures Using the Discrete-Element Method. In: *International journal of geomechanics* 7 (2007), Nr. 2, S. 131–139
- [2] AHRENS, H. ; DINKLER, D.: *Finite-Element-Methoden – Teil I*. 2006
- [3] AHRENS, H. ; DUDDECK, H. ; KOWALSKY, U. ; PENSKY, H. ; STREILEIN, T.: Development and Improvement of Unified Models and Applications to Structural Analysis. In: STECK, E. (Hrsg.) ; RITTER, R. (Hrsg.) ; PEIL, U. (Hrsg.) ; ZIEGENBEIN, A. (Hrsg.): *Plasticity of Metals: Experiments, Models, Computation*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2001, S. 174–217
- [4] ASCHENBRENNER, L.: *Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt*, Institut für Statik, TU Braunschweig, Dissertation, 2007. – Bericht 2006–103
- [5] BAGLEY, R. L. ; TORVIK, P. J.: A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. In: *Journal of Rheology* 27 (1983), Juni, Nr. 3, 201–210
- [6] BATHE, K.-J.: *Finite - Elemente - Methoden*. Berlin : Springer-Verlag GmbH, 1990
- [7] BAUER, E.: *Zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe unter vorwiegend ödometrischer Beanspruchung*, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, Dissertation, 1992
- [8] BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K. ; MORAN, B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester : John Wiley & Sons Ltd., 2000
- [9] BLUHM, J.: Modelling of saturated thermo-elastic porous solids with different phase temperatures. In: EHLERS, W. (Hrsg.) ; BLUHM, J. (Hrsg.): *Porous Media: Theory, Experiments, and Numerical Applications*. Springer, 2002
- [10] BÖHRNSEN, J.-U. ; ANTES, H.: Dynamic effects of granular flow in silos. In: *Conveying and Handling of Particulate Solids* 1 (2000), S. 4–18
- [11] BONET, J. ; WOOD, R. D.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. 2nd edition. Cambridge University Press, 2008

- [12] BONNIER, P. G.: *Testing, modelling and numerical analysis of the mechanical behaviour of bituminous concrete*, Delft University of Technology, Dissertation, 1993
- [13] BOWEN, R. M.: Continuum Physics. In: ERINGEN, A.C. (Hrsg.): *Theory of Mixtures*. Academic Press New York, 1976, S. 1–127
- [14] BOWEN, R. M.: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. In: *International Journal of Engineering Science* 18 (1980), Nr. 9, 1129–1148
- [15] BOWER, A. F.: *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press, 2009
- [16] BURMISTER, D. M. ; PALMER, L. A. ; BARBER, E. S. ; CASAGRANDE, A. D. ; MIDDLEBROOKS, T. A.: The Theory of Stress and Displacements in layered Systems and Applications to the Design of Airport Runways. In: *Highway Research Board Proceedings* 23 (1943), S. 126–148
- [17] CHAMBON, R. ; DESRUES, J. ; HAMMAD, W. ; CHARLIER, R.: CLoE, a new rate-type constitutive model for geomaterials theoretical basis and implementation. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 18 (1994), Nr. 4, 253–278
- [18] CHEUNG, C. Y. ; CEBON, D.: Experimental study of pure bitumens in tension, compression, and shear. In: *Journal of Rheology* 41 (1997), Nr. 1, S. 45–74
- [19] COLEMAN, B. D. ; NOLL, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13 (1963), Nr. 1, S. 167–178
- [20] COULOMB, C. A.: Essai sur une application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a l'architecture. In: *Memoires de l'Academie Royale pres Divers Savants* 7 (1776), S. 343–382
- [21] DARVE, F.: The expression of rheological laws in incremental form and the main classes of constitutive equations. In: *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling* (1990), S. 123–147
- [22] DE BOER, R.: Trends in Continuum Mechanics of Porous Media. In: *Theory and Applications of Transport in Porous Media* Bd. 18. Springer, 2005
- [23] DE BOER, R. ; EHLERS, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme / Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen. 1986 (Heft 40). – Forschungsbericht
- [24] DE SOUZA NETO, E. A. ; PERIĆ, D. ; OWEN, D. R. J.: *Computational Methods for Plasticity – Theory and Applications*. John Wiley & Sons Ltd., 2008

- [25] DEUFLHARD, P.: A modified Newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting. In: *Numerische Mathematik* 22 (1974), August, Nr. 4, 289–315
- [26] DIEBELS, S.: *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf Basis der Theorie Poröser Medien*. Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, 2000. – Habilitation
- [27] DIETHELM, K. ; FORD, N. J. ; FREED, A. D. ; LUCHKO, Y.: Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Februar, Nr. 6–8, 743–773
- [28] DIN 18126:1996-11: *Baugrund, Untersuchung von Bodenproben – Bestimmung der Dichte nichtbindiger Böden bei lockerster und dichtester Lagerung*. Deutsches Institut für Normung e.V., 1996
- [29] DIN 18135:1999-06: *Baugrund, Untersuchung von Bodenproben – Eindimensionaler Kompressionsversuch*. Deutsches Institut für Normung e.V., 1999
- [30] DINKLER, D. ; SCHWESIG, M.: Numerische Lösung von Anfangswertproblemen in der Statik und Dynamik. In: *Festschrift Heinz Duddeck*. Institut für Statik, TU Braunschweig, 1988, S. 99–116
- [31] DOHERTY, W. P. ; WILSON, E. L. ; TAYLOR, R. L.: *Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher Order Quadrilateral Finite Elements* / Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley. 1961. – Forschungsbericht
- [32] DRUCKER, D. C. ; PRAGER, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952), Nr. 2, S. 157–165
- [33] ENELUND, M. ; JOSEFSON, B. L.: Time-domain finite element analysis of viscoelastic structures with fractional derivatives constitutive relations. In: *AIAA journal* 35 (1997), Nr. 10, S. 1630–1637
- [34] FEISE, H. J.: *Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern*. In: *Braunschweiger Schriften zur Mechanik* Bd. 23. Mechanik-Zentrum Technische Universität Braunschweig, 1996
- [35] FELLIN, W. ; OSTERMANN, A.: Consistent tangent operators for constitutive rate equations. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 26 (2002), 1213–1233
- [36] FORD, N. J. ; SIMPSON, A. C.: The numerical solution of fractional differential equations: Speed versus accuracy. In: *Numerical Algorithms* 26 (2001), April, Nr. 4, 333–346
- [37] GARTUNG, T.: *Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung*, Institut für Statik, TU Braunschweig, Dissertation, 1996. – Bericht 96–82

- [38] GARTUNG, T. ; DUDDECK, H. ; AHRENS, H.: Dreiaxiales Stoffmodell zur Berechnung von Asphaltstraßen. In: *Bitumen* 59 (1997), Nr. 4, S. 146–151
- [39] GEMANT, A.: A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies. In: *Physics* 7 (1936), August, Nr. 8, 311–317
- [40] GRIEWANK, A. ; WALTHER, A.: *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008
- [41] GUDEHUS, G.: A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. In: *Canadian Geotechnical Journal* 20 (1979), S. 502–516
- [42] GUDEHUS, G.: A Comprehensive Constitutive Equation for Granular Materials. In: *Journal of the Japanese Geotechnical Society : soils and foundation* 36 (1996), Nr. 1, 1–12
- [43] GUDEHUS, G. ; KOLYMBAS, D.: Numerical testing of constitutive relations for soils. In: NAGOYA, A. (Hrsg.): *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. Geomech.* Bd. 1, Balkema, 1985, S. 63–81
- [44] HASE, M.: *Zur Zugviskosität von Asphalten bei hohen und tiefen Temperaturen*, Institut für Straßenwesen, TU Braunschweig, Dissertation, 1991. – Heft 11
- [45] HASSANIZADEH, M. ; GRAY, W. G.: General conservation equations for multi-phase systems: 1. Averaging procedure. In: *Advances in Water Resources* 2 (1979), März, 131–144
- [46] HASSANIZADEH, M. ; GRAY, W. G.: General conservation equations for multi-phase systems: 2. Mass, momenta, energy, and entropy equations. In: *Advances in Water Resources* 2 (1979), März, 191–203
- [47] HASSANIZADEH, M. ; GRAY, W. G.: General conservation equations for multi-phase systems: 3. Constitutive theory for porous media flow. In: *Advances in Water Resources* 3 (1980), März, Nr. 1, 25–40
- [48] HERLE, I.: *Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste*, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, Dissertation, 1997. – Heft 142
- [49] HERLE, I. ; GUDEHUS, G.: Determination of parameters of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies. In: *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 4 (1999), Nr. 5, 461–486
- [50] HOLLER, S.: *Dynamisches Mehrphasenmodell mit hypoplastischer Materialformulierung der Feststoffphase*, Fakultät für Bauingenieurwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Dissertation, 2006

- [51] HUSCHEK, S.: *Zum Verformungsverhalten von Asphaltbeton unter Druck*, Institut für Strassen-, Eisenbahn- und Felsbau, ETH Zürich, Dissertation, 1983
- [52] JÄGER, A. ; LACKNER, R. ; STANGL, K.: Microscale characterization of bitumen – back-analysis of viscoelastic properties by means of nanoindentation. In: *International Journal of Materials Research* 98 (2007), Nr. N5, S. 404–413
- [53] KAI-XIN, H. ; KE-QIN, Z.: Mechanical Analogies of Fractional Elements. In: *Chinese Physics Letters* 26 (2009), Nr. 10, S. 108301–1–108301–3
- [54] KAYSER, A.: *Eine Theorie für Mehrkomponentenkontinua und ihre Transformation in eine Stabtheorie mit Anwendungen auf den menschlichen Oberschenkelknochen*, Bergische Universität - Gesamthochschule Wuppertal, Dissertation, 2000
- [55] KIM, Y. R. ; LEE, H.-J. ; LITTLE, D. N.: Fatigue Characterization of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Theory. In: *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists* 66 (1997), S. 520–569
- [56] KOELLER, R. C.: Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity. In: *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984), Juni, Nr. 2, 299–307
- [57] KOITER, W. T.: Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 11 (1953), Nr. 3, S. 350–354
- [58] KOLYMBAS, D.: A rate-dependent constitutive equation for soils. In: *Mechanics Research Communications* 4 (1977), Nr. 6, 367–372
- [59] KOLYMBAS, D.: A constitutive law of the rate type for soils. In: GUDEHUS (Hrsg.) ; DARVE (Hrsg.) ; VARDOULAKIS (Hrsg.): *Constitutive relations for soils*. Rotterdam, Grenoble : Balkema, 1982
- [60] KOLYMBAS, D.: A novel constitutive law for soils. In: *Constitutive laws for engineering materials: theory and applications*. Tucson, Arizona : Elsevier, January 1987, S. 319–326
- [61] KOLYMBAS, D.: *Introduction to Hypoplasticity*. Rotterdam : A. A. Balkema, 2000
- [62] KOSCHNICK, F.: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*, Technische Universität München, Universitätsbibliothek, Dissertation, 2004
- [63] KRASE, V.: *Stability of municipal solid waste landfills*, Institut für Statik, TU Braunschweig, Dissertation, 2008. – Bericht 2008–106
- [64] KRASS, K.: *Kriechuntersuchungen an zylindrischen Asphaltprobekörpern*, Institut für Straßenbau- und Eisenbahnwesen der Universität Karlsruhe, Dissertation, 1971

- [65] KRINGOS, N.: *Modeling of combined physical-mechanical moisture induced damage in asphaltic mixes*, Delft University of Technology, Dissertation, 2007
- [66] KRISHNAN, J. M. ; RAJAGOPAL, K. R. ; LITTLE, D. N.: Rate-Type Model for Bituminous Mixtures and Its Application to Sand Asphalt. In: *Journal of Engineering Mechanics* 132 (2006), June, Nr. 6, S. 632–640
- [67] KRISHNAN, J. M. ; RAO, C. L.: Mechanics of air voids reduction of asphalt concrete using mixture theory. In: *International Journal of Engineering Science* 38 (2000), Nr. 12, S. 1331–1354
- [68] KRISHNAN, J. M. ; RAO, C. L.: Permeability and bleeding of asphalt concrete using mixture theory. In: *International Journal of Engineering Science* 39 (2001), Nr. 39, S. 611–627
- [69] KUDELLA, P. ; REUL, O.: Hypoplastic analyses of piled rafts. In: MESTAT (Hrsg.): *Numerical Methods in geotechnical Engineering*. Presses de l'ENPC/LCPC, 2002
- [70] KULLSTAM, P. A.: Heaviside's operational calculus: Oliver's revenge. In: *IEEE Transactions on Education* 34 (1991), Nr. 2, S. 155–166
- [71] KULLSTAM, P. A.: Heaviside's operational calculus applied to electrical circuit problems. In: *IEEE Transactions on Education* 35 (1992), Nr. 4, S. 266–277
- [72] LACKNER, R. ; BLAB, R. ; JÄGER, A. ; SPIEGL, M. ; KAPPL, K.: Multiscale Modeling as the Basis for Reliable Predictions of the Behaviour of Multi-Composed Materials. In: TOPPING, B. H. V. (Hrsg.) ; MOTA SOARES, C. A. (Hrsg.): *Progress in Engineering Computational Technology*, 2004, S. 153–187
- [73] LADE, P. V.: Effects of voids and volume changes on the behaviour of frictional materials. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 12 (1988), Nr. 4, 351–370
- [74] LEE, H.-J. ; DANIEL, J. S. ; KIM, Y. R.: Continuum Damage Mechanics-Based Fatigue Model of Asphalt Concrete. In: *Journal of Materials in Civil Engineering* 12 (2000), S. 105–112
- [75] LEE, H.-J. ; KIM, Y. R.: Viscoelastic Continuum Damage Model of Asphalt Concrete with Healing. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124 (1998), Nr. 11, S. 1224–1232
- [76] LEUTNER, R. ; BÜCHLER, S. ; LOBACH, T. ; RENKEN, P.: Der dynamische Stempel-eindringversuch – Beurteilung der Verformungseigenschaften von Asphalts. In: *Asphalt* 5 (2003), S. 17–22
- [77] LEUTNER, R. ; LORENZL, H. ; SCHMOECKEL, K.: Stoffmodelle zur Voraussage des Verformungswiderstandes und Ermüdungsverhaltens von Asphaltbefestigungen. In: BUNDESANSTALT FÜR STRASSENWESEN (Hrsg.): *BAST-Reihe Straßenbau Bd. BAST-S-45*. Wirtschaftsverlag NW, 2006

- [78] LION, A.: On the thermodynamics of fractional damping elements. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 9 (1997), April, Nr. 2, 83–96
- [79] LU, Y. ; WRIGHT, P. J.: Numerical approach of visco-elastic analysis for asphalt mixtures. In: *Computers and Structures* 69 (1998), Nr. 2, S. 139–147
- [80] MALKUS, D. S. ; HUGHES, T. J. R.: Mixed finite element methods – Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 15 (1978), Juli, Nr. 1, 63–81
- [81] MATSUOKA, H. ; NAKAI, T.: Stress-Strain relationship of soil based on the 'SMP', Constitutive Equations of Soils. In: MURAYAMA, S. (Hrsg.) ; SCHOFIELD, A.N. (Hrsg.): *Proc. of Speciality Session 9, IX ICSMFE*. Tokyo, 1977, S. 153–162
- [82] MOLLENHAUER, K.: *Dimensionierungsrelevante Prognose des Ermüdungsverhaltens von Asphalt mittels einaxialer Zug-Schwellversuche*, Institut für Straßenwesen, TU Braunschweig, Dissertation, 2008. – Heft 21
- [83] MORI, T. ; TANAKA, K.: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. In: *Acta Metallurgica* 21 (1973), Mai, Nr. 5, 571–574
- [84] NIEMUNIS, A.: *Extended hypoplastic models for soils*. Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Ruhr-Universität Bochum, 2003
- [85] NIEMUNIS, A. ; HERLE, I.: Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. In: *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 2 (1997), Nr. 4, 279–299
- [86] NOWAK, U. ; WEIMANN, L.: A Family of Newton Codes for Systems of Highly Nonlinear Equations / Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin. 1991 (TR-91-10). – Forschungsbericht
- [87] NUTTING, P. G.: A new general law of deformation. In: *Journal of the Franklin Institute* 191 (1921), Mai, Nr. 5, 679–685
- [88] OESER, M.: *Numerische Simulation des nichtlinearen Verhaltens flexibler mehrschichtiger Verkehrswegebefestigungen*, TU Dresden - Lehrstuhl für Statik, Dissertation, 2004
- [89] OESER, M. ; PELLINEN, T. ; SCARPAS, T. ; KASBERGEN, C.: Studies on creep and recovery of rheological bodies based upon conventional and fractional formulations and their application on asphalt mixture. In: *International Journal of Pavement Engineering* 9 (2008), Nr. 5, 373–386
- [90] OLDHAM, K. B. ; SPANIER, J.: The fractional Calculus. In: *Mathematics in Science and Engineering* Bd. 111. New York and London : Academic Press, 1974

- [91] PADOVAN, J.: Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. In: *Computational Mechanics* 2 (1987), Dezember, Nr. 4, 271–287
- [92] PARK, S. W. ; KIM, Y. R. ; SCHAPERY, R. A.: A viscoelastic continuum damage model and its application to uniaxial behavior of asphalt concrete. In: *Mechanics of Materials* 24 (1996), S. 241–255
- [93] PERZYNA, P: Fundamental Problems in Viscoplasticity. In: *Advances in applied mechanics* 9 (1966), S. 243–377
- [94] PICHLER, C. ; LACKNER, R. ; MANG, H.: Multiscale Model for Creep of Shotcrete - From Logarithmic-Type Viscous Behavior of CSH at the μ m-Scale to Macroscopic Tunnel Analysis. In: *Journal of Advanced Concrete Technology* 6 (2008), Nr. 1, S. 91–110
- [95] PODLUBNY, I.: Fractional differential equations. In: *Mathematics in Science and Engineering* Bd. 198. San Diego : Academic press, 1999
- [96] POHLHEIM, H.: *Evolutionäre Algorithmen: Verfahren, Operatoren und Hinweise für die Praxis*. Springer, 1999
- [97] POHLMANN, P: *Simulation von Temperaturverteilungen und thermisch induzierten Zugspannungen in Asphaltstraßen*, Institut für Straßenwesen, TU Braunschweig, Dissertation, 1989. – Heft 9
- [98] RDO ASPHALT 09: *Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdeckschicht*. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, 2009
- [99] RICKEN, T. ; USTOHALOVA, V.: Modeling of Thermal Mass Transfer in Porous Media with Applications to Organic Phase Transition in Landfills. In: *Computational Material Science* 32 (2005), S. 498–508
- [100] RSTO 01: *Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaues von Verkehrsflächen*. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, 2001
- [101] SCHAPERY, R. A.: Correspondence principles and a generalized J-integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media. In: *International Journal of Fracture* 25 (1984), S. 195–223
- [102] SCHAPERY, R. A.: A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (1990), Nr. 2, 215–253
- [103] SCHMIDT, A. ; GAUL, L.: Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equations Using Fractional Time Derivatives. In: *Nonlinear Dynamics* 29 (2002), Juli, Nr. 1, 37–55

- [104] SCOTT BLAIR, G. W.: The role of psychophysics in rheology. In: *Journal of Colloid Science* 2 (1947), Februar, Nr. 1, 21–32
- [105] SIDES, A. ; UZAN, J. ; PERL, M.: A comprehensive viscoelasto-plastic characterization of sand-asphalt compressive and tensile cyclic loading. In: *Journal of Testing and Evaluation* 13 (1985), Nr. 1, S. 49–59
- [106] SOUSA, J. B. ; WEISSMAN, S.: Modeling permanent deformation of asphalt concrete mixtures. In: *Journal Association of Asphalt Paving Technologists* 63 (1994), S. 224–257
- [107] SUN, D. D. N. ; LEONG, K. W.: A Nonlinear Hyperelastic Mixture Theory Model for Anisotropy, Transport, and Swelling of Annulus Fibrosus. In: *Annals of Biomedical Engineering* 32 (2004), S. 92–102
- [108] SVENDSEN, B. ; HUTTER, K. ; LALOUI, L.: Constitutive models for granular materials including quasi-static frictional behaviour: Toward a thermodynamic theory of plasticity. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 11 (1999), August, Nr. 4, 263–275
- [109] TRUESDELL, C. ; TOUPIN, R. A.: The Classical Field Theories. In: FLÜGGE, S. (Hrsg.): *Handbuch der Physik* Bd. III. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1960
- [110] VON WOLFFERSDORFF, P.-A.: A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. In: *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 1 (1996), 251–271
- [111] WALTHER, A.: Getting Started with ADOL-C. In: NAUMANN, U. (Hrsg.) ; SCHENK, O. (Hrsg.) ; SIMON, H. D. (Hrsg.) ; TOLEDO, S. (Hrsg.): *Combinatorial Scientific Computing*. Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, Germany, 2009 (Dagstuhl Seminar Proceedings 09061)
- [112] WU, W.: *Hypoplastizität als mathematisches Modell zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe*, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, Dissertation, 1992
- [113] ZENER, C.: *Elasticity and anelasticity of metals*. Univ. of Chicago Press, 1948
- [114] ZTV ASPHALT-StB 07: *Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen und Richtlinien für den Bau von Verkehrsflächenbefestigungen aus Asphalt*. Bd. Ausgabe 2007. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, 2007

A Anhang

A.1 Tensoroperatoren

Identität

$$\mathbb{I} = \delta_{ik} \delta_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbb{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{I} \quad (\text{A.2})$$

Transposition

$$\tilde{\mathbb{I}} = \delta_{il} \delta_{jk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{\mathbb{I}} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \mathbf{A} : \tilde{\mathbb{I}} \quad (\text{A.4})$$

Spurbildung

$$\mathbb{R} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \delta_{ij} \delta_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbb{R} : \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A} : \mathbb{R} \quad (\text{A.6})$$

Kugelteilbildung

$$\mathbb{V} = \frac{1}{N} \mathbb{R} \text{ mit } N \text{ Dimension des Tensorraums} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbb{V} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbb{V}} = \frac{1}{N} \text{tr } \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbb{V} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{V} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbb{V} : \mathbb{V} = \mathbb{V} \quad (\text{A.10})$$

Deviatorbildung

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} - \mathbb{V} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbb{D} : \mathbf{A} = \text{dev } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbb{D}} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbb{D} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{D} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbb{D} : \mathbb{D} = \mathbb{D} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbb{D} : \mathbb{V} = 0 \quad (\text{A.15})$$

A.2 Matrix-Formen

3D-Kontinuum

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_a &= \mathbf{B}_a^{\mathbb{D}} + \mathbf{B}_a^{\mathbb{V}} \\
 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & & & \\ & \frac{\partial N_a}{\partial y} & & \\ & & \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} & \frac{\partial N_a}{\partial y} & \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x} & \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} & \frac{\partial N_a}{\partial y} & \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x} & \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial z} & \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial z} & \frac{\partial N_a}{\partial y} & \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x} & \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Ebener Verzerrungszustand

$$\begin{aligned}
 EVZ \mathbf{B}_a &= EVZ \mathbf{B}_a^{\mathbb{D}} + EVZ \mathbf{B}_a^{\mathbb{V}} \\
 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial x} & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Rotationssymmetrischer Zustand

$$\begin{aligned}
 Rota \mathbf{B}_a &= Rota \mathbf{B}_a^{\mathbb{D}} + Rota \mathbf{B}_a^{\mathbb{D}} \\
 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{N_a}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} + \frac{N_a}{r} \right) & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} + \frac{N_a}{r} \right) & \frac{2}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{N_a}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} + \frac{N_a}{r} \right) & -\frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} + \frac{N_a}{r} \right) & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} + \frac{N_a}{r} \right) & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} + \frac{N_a}{r} \right) & \frac{1}{3} \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} & \frac{\partial N_a}{\partial x} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Deviatoroperator

$$3D : D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2D : D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Kugelteiloperator

$$3D : V = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2D : V = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

A.3 Modellparameter

Bindemittel

A.1.1: Basisparameter

E_{el} [MPa]	ν_{el} [-]	E_{vp} [MPa]	$\dot{\epsilon}_{vp}^0$ [1/s]	σ_{vp}^0 [MPa]	n_{vp} [-]	α_{vp} [-]
185,10	0,35	88,30	$5,11 \cdot 10^{-2}$	648,60	1,11	0,72

A.1.2: Parameter der Temperaturabhängigkeit

$W_{E_{el}}$ [1/°C]	$W_{E_{vp}}$ [1/°C]	$W_{\sigma_{vp}^0}^q$ [1/°C ²]	$W_{\sigma_{vp}^0}^l$ [1/°C]
$-3,33 \cdot 10^{-2}$	-0,22	$1,52 \cdot 10^{-3}$	-0,41

Tabelle A.1: Modellparameter des fraktionalen Maxwell-Modells

Mineralstoffgemische

A.2.1: Klassisches Modell nach VON WOLFFERSDORFF

	φ_c [°]	h_s [MPa]	n [-]	e_{d0} [-]	e_{c0} [-]	e_{i0} [-]	α [-]	β [-]
AB 11	36,27	16,72	0,39	0,22	0,50	0,57	0,43	0,99
SMA 11	33,40	22,34	0,59	0,34	0,59	0,67	0,17	0,86
Frosts.	36,00	$3,2 \cdot 10^4$	0,18	0,26	0,45	0,50	0,10	1,80

A.2.2: Erweiterung intergranulare Dehnungen

	R [-]	m_T [-]	m_R [-]	β_r [-]	χ [-]
AB 11	$4,14 \cdot 10^{-3}$	1,13	1,54	1,64	2,47
SMA 11	$2,34 \cdot 10^{-3}$	1,13	1,51	2,90	3,09
Frosts.	0,1	2,00	5,00	2,00	2,00

A.2.3: Kohäsion

c [MPa]
–
–
–0,10

Tabelle A.2: Modellparameter der untersuchten Mineralstoffgemische

Verbundmodell

A.3.1: Kenngrößen der Asphaltmischungen

	AB 11	SMA 11	ABi	ATS
ω^b [M.-%]	6,10	6,90	5,50	4,80
ω^f [M.-%]	8,00	9,00	7,00	6,00
n^p [Vol.-%]	4,40	2,40	4,50	6,00

A.3.2: Parameter des Verbundmodells

	AB 11	SMA 11	ABi	ATS
n^m [Vol.-%]	75,35	74,53	77,20	78,17
n^b [Vol.-%]	20,25	23,07	18,30	15,83
n^p [Vol.-%]	4,40	2,40	4,50	6,00

Tabelle A.3: Kenngrößen und resultierende Volumenanteile der untersuchten Asphaltmischungen

A.4.1: Modifikation der Mineralstoffparameter

	$\widehat{\Theta}_n$	\widehat{W}_n	\widehat{m}_R	\widehat{W}_{m_R}	\widehat{m}_T	\widehat{W}_{m_T}
AB 11	9,89	$3,51 \cdot 10^{-2}$	5,00	$-7,86 \cdot 10^{-2}$	$= \widehat{m}_R$	$= \widehat{W}_{m_R}$
SMA 11	-7,45	0,55	0,55	-0,25	$= \widehat{m}_R$	$= \widehat{W}_{m_R}$

A.4.2: Modifikation der E-Moduli des fraktionalen Modells

	\widehat{E}_{el}	$\widehat{W}_{E_{el}}$	\widehat{E}_{vp}	$\widehat{W}_{E_{vp}}$
AB 11	174,40	$-9,02 \cdot 10^{-2}$	18,10	$-9,99 \cdot 10^{-2}$
SMA 11	98,63	$-7,91 \cdot 10^{-2}$	21,29	-0,28

A.4.3: Modifikation der Bezugsspannung und des Norton-Parameters

	$\widehat{\sigma}_0$	$\widehat{W}_{\sigma_0}^q$	$\widehat{W}_{\sigma_0}^l$	\widehat{n}_{vp}	$\widehat{W}_{n_{vp}}$
AB 11	11,08	$-3,04 \cdot 10^{-3}$	0,30	1,01	$-2,6 \cdot 10^{-6}$
SMA 11	11,65	$1,02 \cdot 10^{-3}$	0,15	0,82	$-1,09 \cdot 10^{-6}$

Tabelle A.4: Modellparameter der Modifikation

Berichte aus dem Institut für Statik ab 2003

- Nr. 2003-96 B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen
- Nr. 2003-97 J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme
- Nr. 2003-98 O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen
- Nr. 2005-99 A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen
- Nr. 2006-100 D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
- Nr. 2006-101 A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
- Nr. 2006-102 M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
- Nr. 2006-103 L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
- Nr. 2006-104 T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
- Nr. 2007-105 C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
- Nr. 2007-106 V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2007-107 J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragerwerken
- Nr. 2009-108 M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
- Nr. 2010-109 P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
- Nr. 2010-110 J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
- Nr. 2010-111 K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
- Nr. 2011-112 S. BENITE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2011-113 L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.

Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland
Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116
E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>